ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Н. БУРБАКИ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1333 1347

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par

N. BOURBAKI

FASC. XXXIII, XXXVI

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET ANALYTIQUES

Fascicule de résultats

Paragraphes 1 à 7

1967

Paragraphes 8 à 15

1971

HERMANN

156 Boulevard Saint-Germain, Paris VI

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Сводка результатов

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Г. И. ОЛЬШАНСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. А. КИРИЛЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1975

УДК 519.4

Книга представляет собой перевод двух выпусков трактата Н. Бурбаки и содержит изложение результатов важной области современной математики — теории конечномерных и бесконечномерных многообразий. Особенность книги, делающая ее уникальным событием в математической литературе,— это единообразное изложение теории для произвольных основных полей.

На эту книгу имеется большое число ссылок в других частях трактата Н. Бурбаки, в частности в выпускаемой в этом же году книге «Группы и алгебры Ли» (гл. I—III). Она предназначена для самого широкого круга математиков различных специальностей — от студентов до научных работников.

Редакция литературы по математическим наукам

Б $\frac{20203—004}{041(01)—75}$ 4—75

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю часть трактата Н. Бурбаки представляет собой сводку результатов еще не написанной книги «Дифференцируемые и аналитические многообразия».

Понятие многообразия играет очень большую роль во многих разделах математики и ее приложений. В последние годы это понятие существенно расширилось в двух направлениях. Во-первых, начато математическое изучение бесконечномерных многообразий (которые уже давно появлялись в функциональном анализе, геометрии, механике и физике). Во-вторых, развитие алгебраической геометрии и теории чисел естественно привело к рассмотрению многообразий над произвольным полем.

В литературе на русском языке имеется довольно много изложений классической теории многообразий. Бесконечномерные многообразия рассматриваются в книге С. Ленга «Введение в теорию дифференцируемых многообразий», «Мир», 1967, а некоторые элементарные сведения о p-адических многообразиях содержатся в книге Ж.-П. Серра «Группы и алгебры Ли», «Мир», 1970.

Однако единого изложения теории многообразий в достаточной общности пока нет; кроме того, указанные выше книги давно разошлись. Поэтому перевод сводки результатов Н. Бурбаки, даже до выхода самой книги, мне кажется весьма своевременным.

Французское издание «Сводки результатов» появилось в двух выпусках с интервалом в четыре года. При переводе оба выпуска соединены в одну книгу с общим введением, указателями обозначений и терминов и дополнениями. Исправлены опечатки первого выпуска, указанные автором в приложении ко второму выпуску.

Читатель наверняка уже знаком со стилем трактата Н. Бурбаки, который сохраняется и в данном издании.

Как правило, мы придерживались перевода терминов, уже встречавшихся в ранее переведенных выпусках. Два случая заслуживают особого упоминания.

Термин «application propre» в первом русском издании «Общей топологии» был переведен как «свойственное отображение», а во втором — как «совершенное отображение». Мы предпочли термин «собственное отображение», который чаще всего употребляется в современной литературе.

Прилагательное «sous-jacent» точнее всего было бы перевести как «подлежащее», но это слово в русском языке давно уже превратилось в существительное. Поэтому мы были вынуждены использовать (как и в переводе «Теории множеств») термин «нижележащее». Введение этого термина заменяет часто встречающиеся в нашей математической литературе обороты, вроде следующих: «Забудем временно, что G есть топологическая группа, и рассмотрим ее как абстрактную группу» или «Многообразие X, рассматриваемое как топологическое пространство», ...

Отметим, что вместо понятия нижележащей структуры иногда вводят так называемый «стирающий функтор» (ср. учебник алгебры С. Ленга).

В заключение укажем, что ссылки на уже переведенные части трактата Н. Бурбаки заменены ссылками на соответствующие русские переводы. В остальных случаях сохранены ссылки на французские издания.

А. Кириллов

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге собраны фундаментальные определения и главные результаты теории дифференцируемых многообразий (*над полем вещественных чисел*) *и* аналитических многообразий (*над полным нормированным недискретным полем*). *Она не содержит доказательств.*

Определения и результаты первых шести книг предполагаются известными.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Основное поле

Во всей этой книге буква K означает либо нормированное поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел, либо нормированное поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, либо полное нормированное недискретное коммутативное поле с ультраметрическим абсолютным значением (*Top. gen.*, chap. IX, 3e éd., § 3). Если не оговорено противное, все банаховы пространства, все многообразия, все морфизмы, все расслоения и т. д. рассматриваются над K.

Специальные соглашения для некоторых параграфов указываются в их начале.

Топологические векторные пространства

Когда поле K отлично от $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, мы называем *полунормой* (соотв. *нормой*) на векторном пространстве F над K *ультраполунорму* (соотв. *ультраполунорму,* являющуюся нормой) на F (*Esp. vect. top.,* chap. II, 2e éd., § 1). Если γ — полунорма на F и если $x \in F$, мы часто будем писать $\|x\|_\gamma$ вместо $\gamma(x)$.

Нормируемым пространством называется топологическое векторное пространство над K, топология которого может быть определена одной нормой, и *банаховым пространством* — полное нормируемое пространство[1]. *Полинормированным* пространством называется топологическое векторное пространство над K, топология которого может быть определена семейством полунорм; когда $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, это понятие совпадает с понятием локально выпуклого пространства.

Если E и F — полинормированные пространства, через $\mathscr{L}_m(E; F)$ обозначается пространство m-линейных непрерывных отображений из E^m в F, наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах в E^m; это полинормированное пространство. Если, кроме того, E нормировано и если γ — непрерывная полунорма на F, а $u \in \mathscr{L}_m(E; F)$, то через

[1]) Это определение отличается от определения, данного в *Esp. vect. top.*, chap. I, § 1, где банаховым пространством называется полное нормированное пространство.

$\| u \|_\gamma$ обозначается наименьшее неотрицательное число, такое, что

$$\| u(x_1, \ldots, x_m) \|_\gamma \leqslant \| u \|_\gamma \cdot \| x_1 \| \ldots \| x_m \|,$$

каковы бы ни были элементы $x_i \in E$.

Мультииндексы

Пусть I — множество. Для $\alpha = (\alpha_i)$ и $\beta = (\beta_i)$, принадлежащих $\mathbf{N}^{(I)}$, полагаем (см. *Alg.*, chap. III, 3[e] éd., начало главы)

$$|\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha_i,$$

$$\alpha! = \prod_{i \in I} \alpha_i!,$$

$$\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I},$$

$$((\alpha, \beta)) = \prod_{i \in I} \frac{(\alpha_i + \beta_i)!}{\alpha_i! \, \beta_i!}.$$

Положим $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всякого $i \in I$, что эквивалентно существованию такого $\gamma \in \mathbf{N}^{(I)}$, что $\beta = \alpha + \gamma$; этот элемент γ тогда единствен и обозначается через $\beta - \alpha$.

Если $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ — семейство попарно коммутирующих элементов в кольце A с единичным элементом 1, то полагаем

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i} \quad \text{(условясь, что } x^0 = 1).$$

Имеем $\mathbf{x}^{\alpha+\beta} = \mathbf{x}^\alpha \, . \, \mathbf{x}^\beta$.

Для $i \in I$ через ε_i обозначается элемент из $\mathbf{N}^{(I)}$, все координаты которого нулевые, за исключением координаты с индексом i, равной 1. Имеем $\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i \varepsilon_i$ для всякого элемента $\alpha = (\alpha_i)$ из $\mathbf{N}^{(I)}$.

Ограничение отображения

Если f — отображение множества A в множество B и если C — подмножество в A, через $f \mid C$ обозначается ограничение отображения f на C.

Элементы ∞ *и* ω

К множеству целых чисел присоединим два элемента, обозначаемые через ∞ и ω. Отношение порядка между целыми числами продолжается с помощью соглашения

$$n < \infty < \omega \text{ для всякого целого } n.$$

Полагаем

$$\infty + n = n + \infty = \infty \text{ и } \omega + n = n + \omega = \omega, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Буква r означает либо целое число $\geqslant 1$, либо один из элементов ∞ или ω. Если $K \neq \mathbf{R}$, буква r означает всегда элемент ω. Если $r = \infty$ (соотв. $r = \omega$), полагаем $r - k = r$ для всякого целого числа $k \geqslant 1$.

Введем для поля K следующее множество N_K:

a) Если $K = \mathbf{R}$, то N_K образовано целыми числами $\geqslant 1$ и символами ∞ и ω.

b) Если $K \neq \mathbf{R}$, то N_K сводится к единственному элементу ω.

Всюду в дальнейшем выражение вида «пусть X — многообразие класса C^r» подразумевает, что r принадлежит N_K; оно эквивалентно выражению «пусть $r \in N_K$, и пусть X есть K-многообразие класса C^r».

Таким образом, если $K = \mathbf{R}$, мы рассматриваем либо *дифференцируемые* многообразия класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, либо *аналитические* многообразия, т. е. многообразия класса C^ω. Если же $K \neq \mathbf{R}$, мы рассматриваем аналитические многообразия.

§ 1. Дифференцируемые функции

В этом параграфе буква E означает *нормируемое* топологическое векторное пространство над K, буква F — *отделимое* полинормированное пространство над K.

1.1. Порядок контакта двух функций в точке

1.1.1. Пусть X — топологическое пространство и θ — числовая функция, определенная в окрестности точки x_0 из X. Говорят, что функция f, определенная в окрестности точки x_0 и принимающая значения в F, *пренебрежима по сравнению с* θ *в* x_0, если выполнено следующее условие:

Для всякого $\varepsilon > 0$ *и всякой полунормы* γ, *непрерывной на* F, *существует окрестность* V *точки* x_0, *в которой определены функции* f *и* θ, *такая, что*

$$\|f(x)\|_\gamma \leqslant \varepsilon\theta(x) \text{ для всякой точки } x \in V.$$

Для того чтобы f была пренебрежима по сравнению с θ, необходимо, чтобы это условие выполнялось для некоторого семейства полунорм, определяющего топологию в F. Факт пренебрежимости или непренебрежимости функции f по сравнению с θ в x_0 зависит лишь от ростков функций f и θ в точке x_0. Через $o_{x_0}(\theta)$ (или $o(\theta)$, когда это не повлечет за собой неясности относительно x_0) обозначается множество ростков в точке x_0 функций, пренебрежимых по сравнению с θ в x_0: это векторное подпространство пространства ростков в x_0 отображений, принимающих значения в пространстве F. Если f пренебрежима по сравнению с θ, будем писать, допуская вольность в обозначениях, $f \in o_{x_0}(\theta)$, или также $f(x) \in o(\theta(x))$, когда x стремится к x_0.

Если f и g — два отображения некоторой окрестности точки x_0 в F, будем писать также $f \equiv g \bmod o(\theta)$, если $f - g$ пренебрежимо по сравнению с θ.

Предположим, что K равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и что x_0 лежит в замыкании множества Y тех точек в X, где θ определена и не обращается в нуль. Тогда $f \in o(\theta)$ обозначает, что $f(x)/\theta(x)$ стремится к 0, когда x стремится к x_0, оставаясь в Y, и что $\theta(x) = 0$ влечет за собой $f(x) = 0$.

1.1.2. Пусть f и g — две функции со значениями в F, определенные в окрестности точки x_0 в E. Если m — целое положительное число, говорят, что f и g имеют *контакт порядка* $\geqslant m$ в x_0, если

$$f(x) - g(x) \in o(\|x - x_0\|^m) \text{ для } x, \text{ стремящейся к } x_0,$$

какова бы ни была норма, выбранная для определения топологии в E. Для этого необходимо и достаточно, чтобы предыдущее соотношение выполнялось для одной нормы, определяющей топологию в E. Если это так, то $f(x_0) = g(x_0)$.

Если f и g принимают одно и то же значение в точке x_0, *порядком контакта* функций f и g в x_0 называется верхняя грань (конечная или равная $+\infty$) целых чисел m, таких, что f и g имеют контакт порядка $\geqslant m$ в x_0.

1.1.3. Порядок контакта функций f и g в x_0 зависит лишь от *ростков* этих функций в точке x_0. Можно, стало быть, говорить о порядке контакта двух ростков φ и ψ отображений пространства E в F в точке x_0. Отношение «φ и ψ имеют контакт порядка $\geqslant m$» есть отношение эквивалентности, согласованное с векторной структурой.

1.2. Функции, дифференцируемые в точке

1.2.1. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0 пространства E, со значениями в F. Говорят, что f *дифференцируема* в x_0, если существует аффинная непрерывная функция v из E в F, имеющая в x_0 контакт порядка $\geqslant 1$ с f. Это отображение v единственно; существует единственное непрерывное линейное отображение, обозначаемое через $Df(x_0)$, из E в F, такое, что

$$v(x) = v(x_0) + Df(x_0).(x - x_0).$$

Если выбрана норма на E, это эквивалентно тому, что

$$f(x_0 + h) \equiv f(x_0) + Df(x_0) . h \mod o(\|h\|) \text{ для } h, \text{ стремящегося к } 0,$$

что можно также записать в виде

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0) . h\|_\gamma}{\|h\|} = 0$$

для всякой полунормы γ, непрерывной на F.

Элемент $Df(x_0)$ из $\mathscr{L}(E; F)$ называется *производной* функции f в точке x_0. Часто пишут $D_h f(x_0)$ вместо $Df(x_0) . h$; это элемент из F, определенный соотношением

$$D_h f(x_0) = \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

1.2.2. Говорят, что функция f *строго дифференцируема в* x_0, если она дифференцируема в x_0 и если для всякой нормы, определяющей

топологию в E, имеет место соотношение

$$f(y) - f(z) \equiv Df(x_0) \,.\, (y - z) \bmod o(\|y - z\|)$$

для (y, z), стремящегося к (x_0, x_0) в $E \times E$. Для этого достаточно выполнения приведенного условия для одной нормы, определяющей топологию в E. Предположим дополнительно, что E и F нормированы; для всякого числа $c > \|Df(x_0)\|$ существует тогда такая окрестность V точки x_0, что $\|f(y) - f(z)\| \leqslant c \,.\, \|y - z\|$ для y, z из V; отсюда следует, что функция f равномерно непрерывна в V.

1.2.3. Дифференцируемость или строгая дифференцируемость функции f в x_0 зависит лишь от ростка функции f в x_0. Ростки функций, дифференцируемых в x_0, образуют векторное подпространство $\mathscr{V}$ пространства всех ростков, и отображение $f \mapsto Df(x_0)$ из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{L}(E; F)$ линейно. Ростки функций, строго дифференцируемых в x_0, образуют векторное подпространство в $\mathscr{V}$.

1.2.4. Функция, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в ней.

1.2.5. Когда $E = K$, отображение $u \mapsto u(1)$ есть изоморфизм из $\mathscr{L}(E; F)$ на F; если функция f дифференцируема в x_0, то элемент

$$f'(x_0) = Df(x_0) \,.\, 1$$

есть не что иное, как производная функции f в точке x_0 в смысле, указанном в *Функц. действ. пер.*, гл. 1, § 1, n° 6, замечание 2.

1.3. Композиция дифференцируемых функций

1.3.1. Предположим, что пространство F нормируемо. Пусть $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, U — окрестность точки x_0, V — окрестность точки y_0; пусть, наконец, f — отображение окрестности U в V, дифференцируемое в x_0, причем $f(x_0) = y_0$. Если g — отображение окрестности V в полинормированное отделимое векторное пространство G, дифференцируемое в y_0, то отображение $g \circ f$ из U в G дифференцируемо в x_0, и мы имеем

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \circ Df(x_0). \tag{1}$$

Если f и g строго дифференцируемы, то и $g \circ f$ строго дифференцируемо.

1.3.2. Пусть f — отображение, определенное в окрестности точки x_0 пространства E, со значениями в F; если u — линейное непрерывное отображение пространства F в полинормированное отделимое пространство G, то функция $u \circ f$ дифференцируема в x_0 и

$$D(u \circ f)(x_0) = u \circ Df(x_0). \tag{2}$$

1.3.3. Предположим, что F — произведение семейства $(F_\iota)_{\iota \in I}$

полинормированных отделимых векторных пространств; для всякого i из I пусть f_i — отображение, определенное в окрестности U точки x_0 в E, со значениями в F_i, и пусть $f = (f_i)_{i \in I}$. Для того чтобы f было дифференцируемым (соотв. строго дифференцируемым) в x_0, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали отображения f_i; имеем

(3) $$D_h f(x_0) = (D_h f_i(x_0))_{i \in I} \text{ для всякого } h \text{ в } E.$$

1.3.4. Если $E = K$, можно в формулах (1) и (3) заменить $Df(x_0)$ на $f'(x_0)$ и $D_h f_i(x_0)$ на $f_i'(x_0)$.

1.4. Произведение дифференцируемых функций

1.4.1. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — полинормированные отделимые пространства и u — непрерывное m-линейное отображение из $F_1 \times \ldots \times F_m$ в F. Пусть U — окрестность точки x_0 в E, и пусть f_i — отображение окрестности U в пространство F_i (для $1 \leqslant i \leqslant m$). Если отображения f_i дифференцируемы (соотв. строго дифференцируемы) в x_0, то таково же и $u(f_1, \ldots, f_m) = g$, и мы имеем

(4) $$D_h g(x_0) = \sum_{j=1}^{m} u(f_1(x_0), \ldots, D_h f_j(x_0), \ldots, f_m(x_0))$$

для h из E,

что записывается более кратко в таком виде:

(5) $$Dg = \sum_{j=1}^{m} u(f_1, \ldots, Df_j, \ldots, f_m).$$

В частности, для $m = 2$

(6) $$Du(f_1, f_2) = u(Df_1, f_2) + u(f_1, Df_2).$$

Для $m = 1$ вновь получаем 1.3.2.

1.4.2. Когда $E = K$, в формулах (4) — (6) можно заменить Dg на g' и Df_j на f_j'.

1.5. Первые варианты теоремы о неявных функциях

Предположим, что E и F — банаховы пространства, и пусть x_0 — точка в E, U — окрестность точки x_0 и f — отображение окрестности U в F. Предположим дополнительно, что функция f *строго дифференцируема* в x_0.

1.5.1. Если $Df(x_0)$ — *изоморфизм* пространства E на F, существуют открытая окрестность U_0 точки x_0, содержащаяся в U, и открытая

окрестность V_0 точки $f(x_0)$, такие, что $f \mid U_0$ есть гомеоморфизм окрестности U_0 на V_0. Отображение g: $V_0 \to U_0$, обратное к $f \mid U_0$, строго дифференцируемо в точке $f(x_0)$ и

$$Dg(f(x_0)) = Df(x_0)^{-1}.$$

1.5.2. Если $Df(x_0)$ — *сюръективное* отображение пространства E на F, то существует такая открытая окрестность U_0 точки x_0, содержащаяся в U, что $f \mid U_0$ есть открытое отображение.

1.5.3. Если отображение $Df(x_0)$ *инъективно и его образ замкнут*, то существует такая замкнутая окрестность U_0 точки x_0, содержащаяся в U, что $f \mid U_0$ есть ее гомеоморфизм на замкнутое подмножество пространства F.

1.6. Частные производные

1.6.1. Пусть f — функция, определенная в окрестности U точки x_0 из E, со значениями в F. Пусть X — векторное подпространство в E и V — множество таких точек x из X, что $x_0 + x \in U$; положим $g(x) = f(x_0 + x)$ для $x \in V$. Говорят, что f допускает *частную производную в* x_0 *вдоль* X, если g допускает производную в точке 0; она обозначается через $D_X f(x_0)$; это линейное непрерывное отображение подпространства X в F. Если f дифференцируема в x_0, она допускает частную производную в x_0 вдоль X, и эта частная производная есть ограничение отображения $Df(x_0)$ на X.

1.6.2. Предположим, что E — произведение конечного семейства нормированных векторных пространств E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, канонически отождествляемых с подпространствами пространства E; пусть $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ лежит в E и U — окрестность точки x_0 в E; пусть, наконец, f — отображение окрестности U в F. Обозначим через $D_i f(x_0)$ производную в точке x_0^i, если она существует, отображения $z_i \mapsto f(x_0^1, \ldots, z_i, \ldots, x_0^n)$, определенного в окрестности точки x_0^i пространства E_i, со значениями в F. Это элемент из $\mathscr{L}(E_i; F)$, который называется *i-й частной производной отображения f в точке* x_0. Если функция f дифференцируема в x_0, существует n частных производных, и они определяют $Df(x_0)$ формулой

$$Df(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_0) \cdot h_i \quad \text{для } h = (h_1, \ldots, h_n) \text{ в } E.$$

1.6.3. В частности, пусть $E = K^n$. Если частные производные отображения f в x_0 существуют, то через $\partial_i f(x_0)$ обозначается элемент $D_i f(x_0) \cdot 1$ из F. Часто используется следующая запись:

предположим, что выбраны обозначения для функций, являющихся координатами на K^n, например u_i означает i-ю проекцию пространства K^n на K; тогда пишут

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x_0) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial u_i}\bigg|_{x=x_0},$$

вместо $\partial_i f\,(x_0)$.

1.6.4. Пусть $E = K^n$ и $F = K^m$; предположим, что функция $f = (f_1, \ldots, f_m)$ со значениями в F дифференцируема в точке x_0 из E. Частные производные $a_{ji} = \partial_i f_j\,(x_0)$ тогда существуют (это элементы из K). Матрица с m строками и n столбцами, образованная элементами a_{ji} (элемент строки индекса j и столбца индекса i), называется *якобиевой матрицей* функции f в x_0; это матрица линейного отображения $Df\,(x_0)$ пространства K^n в K^m по отношению к каноническим базисам этих пространств.

1.7. Итерированные производные

1.7.1. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0 из E, со значениями в F. Если f дифференцируема в окрестности точки x_0, ее производная Df есть отображение окрестности точки x_0 в полинормированное пространство $\mathcal{L}(E; F)$ линейных непрерывных отображений пространства E в F. Пусть p — целое число $\geqslant 2$; говорят, что функция f является *p раз дифференцируемой в x_0*, если f дифференцируема в окрестности точки x_0 и если ее производная Df $p-1$ раз дифференцируема в x_0. Определим тогда *p-ю производную функции f в x_0*: это непрерывное p-линейное отображение $D^p f\,(x_0)$ из E^p в F, определенное формулой

$$D^p f\,(x_0) \cdot (h_1, \ldots, h_p) = (D\,(D^{p-1} f)\,(x_0) \cdot h_1) \cdot (h_2, \ldots, h_p).$$

Полагаем также $D^0 f = f$ и $D^1 f = Df$. Если функция f является p раз дифференцируемой в x_0 и если q и s — два целых числа, таких, что $q + s = p$, где $s > 0$, то f q раз дифференцируема в окрестности точки x_0, функция $D^q f$ (со значениями в $\mathcal{L}_q(E; F)$) s раз дифференцируема в точке x_0 и имеет место соотношение

$$D^{q+s} f\,(x_0) \cdot (h_1, \ldots, h_{q+s}) = \\ = (D^s\,(D^q f)\,(x_0) \cdot (h_1, \ldots, h_s)) \cdot (h_{s+1}, \ldots, h_{q+s}),$$

которое, если допустить вольность в обозначениях, записывается в виде

$$D^{q+s} f = D^s D^q f.$$

1.7.2. Пусть $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — такие замкнутые векторные подпространства в E, что E есть их топологическая прямая сумма. Тогда опре-

деляется, если она существует, *итерированная частная производная* $D_{i_1} \ldots D_{i_m} f$ отображения f окрестности точки $x_0 \in E$ в F; это непрерывное полилинейное отображение пространства

$$E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_m}$$

в F, определяемое рекуррентно для целого числа m следующим образом: если $D_{i_2} \ldots D_{i_m} f(x)$ существует в окрестности точки x_0 и обладает частной производной вдоль E_{i_1}, то $D_{i_1} \ldots D_{i_m} f(x_0)$ задается формулой

$$D_{i_1} \cdots D_{i_m} f(x_0) \,.\, (h_1, \ldots, h_m) =$$
$$= (D_{i_1} (D_{i_2} \cdots D_{i_m} f)(x_0) \,.\, h_1) \,.\, (h_2, \ldots, h_m)$$

для $h_k \in E_{i_k}$.

Для m раз дифференцируемой в x_0 функции f частная производная $D_{i_1} \ldots D_{i_m} f(x_0)$ существует и равна ограничению отображения $D^m f(x_0)$ на подпространство $E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_m}$ в E^m. Следовательно, $D^m f(x_0)$ полностью определяется итерированными частными производными порядка m в точке x_0.

1.7.3. Предположим, что пространство E конечномерно, и пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в нем. Положим $E_i = Ke_i$, и пусть f — отображение окрестности точки x_0, принимающее значение в F. Если частная производная $D_{i_1} \ldots D_{i_m} f(x_0)$ (в обозначениях из 1.7.2) существует, полагаем

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f(x_0) = D_{i_1} \cdots D_{i_m} f(x_0) \,.\, (e_1, \ldots, e_m).$$

§ 2. Вещественные дифференцируемые функции

В этом параграфе предполагается, что $K = \mathbf{R}$. Буква E обозначает *нормированное* векторное пространство над $\mathbf{R}$; буквой F обозначается топологическое локально выпуклое *отделимое* векторное пространство над $\mathbf{R}$.

2.1. Функции, дифференцируемые в точке

2.1.1. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0 в E, со значениями в F. Пусть u — элемент пространства $\mathcal{L}(E; F)$ непрерывных линейных отображений пространства E в F. Для того чтобы f была дифференцируема в x_0 и допускала u в качестве производной, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)}{\|h\|} = 0.$$

2.1.2. Для того чтобы f была строго дифференцируема в x_0, необходимо и достаточно следующее условие:

$$\lim_{\substack{(h,k) \to (0,0) \\ h \neq k}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - Df(x_0) \,.\, (h - k)}{\|h - k\|} = 0.$$

2.1.3. Пусть F_1 и F_2 — два локально выпуклых отделимых пространства и u — билинейное отображение из $F_1 \times F_2$ в F, удовлетворяющее следующему условию непрерывности:

(SC) *Если* $((a_n, b_n))$ — *последовательность элементов из* $F_1 \times F_2$, *сходящаяся к элементу* $(a, b) \in F_1 \times F_2$, *то последовательность* $(u(a_n, b_n))$ *сходится к* $u(a, b)$ *в* F.

Пусть f_i (для $i = 1, 2$) — отображение окрестности точки x_0 пространства E в F_i. Если f_1 и f_2 дифференцируемы в x_0, то $u(f_1, f_2)$ дифференцируемо в x_0 и

$$D(u(f_1, f_2))(x_0) \,.\, h = u(Df_1(x_0) \,.\, h,\ f_2(x_0)) + u(f_1(x_0),\ Df_2(x_0) \,.\, h)$$

для всякого $h \in E$.

2.2. Теорема о конечных приращениях

2.2.1. Пусть x, y принадлежат E и $[x, y]$ — замкнутый отрезок, соединяющий эти две точки. Пусть, кроме того, f — отображение окрестности множества $[x, y]$ в пространство F, дифференцируемое в каждой точке из $[x, y]$. Тогда $f(x) - f(y)$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества точек $Df(z) \,.\, (x - y)$ для z из $[x, y]$.

2.2.2. Пусть U — *связное* открытое подмножество в E и f — отображение из U в F, имеющее нулевую производную в каждой точке из U; тогда f постоянно в U.

2.2.3. Пусть U — *выпуклое* открытое подмножество в E и f — отображение множества U в F, дифференцируемое в каждой точке из U. Если заданы непрерывная полунорма γ на F и вещественное число $M \geqslant 0$, следующие условия эквивалентны:

(i) для всякой точки x из U имеем $\| Df(x) \|_\gamma \leqslant M$;

(ii) для всякой точки x и всякой точки y из U имеем $\| f(x) - f(y) \|_\gamma \leqslant M \,.\, \| x - y \|$.

2.2.4. Пусть U — окрестность точки x_0 из E и f — функция, определенная на дополнении к x_0 в U, со значениями в F. Предположим, что f допускает производную $Df(x)$ во всякой точке x из U, $x \neq x_0$, и что функция $x \mapsto Df(x)$ имеет предел D_0, когда x стремится к x_0. Тогда, если $\dim E \geqslant 2$, то f имеет предел в x_0 и функция f, продолженная по непрерывности на всю окрестность U, дифференцируема, причем ее производная в x_0 равна D_0; это же справедливо, если $\dim E = 1$ и f имеет предел в точке x_0.

2.3. Функции класса C^r $(r \neq \omega)$

2.3.1. Пусть U — открытое подмножество в E и f — отображение множества U в F. Отношение «*f принадлежит классу C^r*» (для $r \in \mathbf{N}$) определяется рекуррентно по r следующим образом:

1) функция f принадлежит классу C^0 тогда и только тогда, когда она непрерывна;

2) если r—целое число $\geqslant 1$, то функция f принадлежит классу C^r тогда и только тогда, когда она дифференцируема в каждой точке из U и производное отображение Df из U в $\mathcal{L}(E; F)$ принадлежит классу C^{r-1}.

Функции класса C^r называются также *r раз непрерывно дифференцируемыми функциями.*

Говорят, что f принадлежит *классу C^∞* (или *бесконечно дифференцируема*), если она принадлежит классу C^r для всякого целого числа r.

Если f принадлежит классу C^r в окрестности U, то она p раз дифференцируема для всякого целого числа $p \leqslant r$, и функция $D^p f$ принадлежит классу C^{r-p}.

2.3.2. Отображения класса C^r открытого в E подмножества U в F образуют векторное пространство $\mathcal{C}^r(U;\ F)$ пространства всех отображений множества U в F. Имеем $\mathcal{C}^s(U;\ F) \subset \mathcal{C}^r(U;\ F)$ для $s \geqslant r$.

2.3.3. Для того чтобы функция f принадлежала классу C^1 в открытом подмножестве U пространства E, необходимо и достаточно, чтобы она была строго дифференцируема в каждой точке из U.

Если E — произведение нормированных пространств E_i, то отображение f открытого в E подмножества V в F принадлежит классу C^r тогда и только тогда, когда f обладает непрерывными итерированными частными производными $D_{i_1} \ldots D_{i_m} f$ для всякого целого числа $m \leqslant r$.

2.3.4. Пусть G — нормированное пространство и U — открытое подмножество в E. Пусть V — открытое подмножество в G, $g \in \mathcal{C}^r(U;\ G)$ и $f \in \mathcal{C}^r(V;\ F)$. Если $g(U) \subset V$, то отображение $f \circ g$ из U в F принадлежит классу C^r.

Пусть F_1 и F_2 — два отделимых локально выпуклых пространства и u — билинейное отображение произведения $F_1 \times F_2$ в F, гипонепрерывное относительно совокупности *ограниченных* подмножеств в F_1 (соотв. F_2) (*Топ. вект. пр.*, гл. III, § 4, n° 2). Пусть U — открытое подмножество в E и $f_i \in \mathcal{C}^r(U;\ F_i)$ (для $i = 1, 2$). Тогда функция $u(f_1, f_2)$ принадлежит $\mathcal{C}^r(U;\ F)$. Если E имеет *конечную размерность,* достаточно предполагать, что u удовлетворяет условию (SC) из n° 2.1.3.

2.3.5. Если E — произведение нормированных пространств E_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) и если f — непрерывное m-линейное отображение из E в F, то f принадлежит классу C^∞ и $D^p f = 0$ для $p \geqslant n + 1$.

2.3.6. Предположим, что E и F — банаховы пространства. Пусть f — функция класса C^r (с $r \geqslant 1$), определенная в окрестности точки x_0 из E, со значениями в F. Пусть $y_0 = f(x_0)$, и предположим, что $Df(x_0)$ есть *изоморфизм* пространства E на F. Тогда f индуцирует гомеоморфизм g некоторой окрестности точки x_0 на некоторую окрестность точки y_0 (n° 1.5) и *отображение, обратное к* g, *принадлежит классу* C^r *в окрестности точки* y_0.

2.4. Производные функций класса C^r

2.4.1. Пусть f — отображение класса C^r открытого в E подмножества U в F. Для всякого $x \in U$ и всякого целого числа s, где $2 \leqslant s \leqslant r$, полилинейное отображение $D^s f(x)$ *симметрично.*

2.4.2. Предположим дополнительно, что E конечномерно, и пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в E. Частные производные $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_s} f$ *симметрично* зависят от индексов $i_1, \ldots, i_s$. Пусть α_k — число вхождений индекса k в последовательность $i_1, \ldots, i_s$, и пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Полагаем тогда

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_s} f.$$

Если координаты относительно базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ обозначаются через $x_1, \ldots, x_n$, то $\partial^\alpha f$ записывают также в форме

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

2.5. Формула Тейлора

2.5.1. Пусть r — целое число $\geqslant 1$, и пусть f — отображение класса C^r открытого в E подмножества U в F. Для $x \in U$, $h \in E$ и $p \leqslant r$ условимся вместо $D^p f(x_0) \, . \, (h, \ldots, h)$ писать $D^p f(x_0) \, . \, h^p$. Если отрезок $[x, x + h]$ содержится в U, то имеет место формула (*формула Тейлора*)

$$f(x + h) = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{p!} D^p f(x) \, . \, h^p + v_r(x; \; h),$$

где «остаток» $v_r(x; h)$ задается формулой

$$v_r(x; \; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f(x + th) \, . \, h^r \, dt.$$

Имеем

$v_r(x; \; h) \equiv \frac{1}{r!} D^r f(x) \, . \, h^r \bmod o(\|h\|^r)$, когда h стремится к 0 и

$f(x + h) \equiv \sum_{p=0}^{r} \frac{1}{p!} D^p f(x) \, . \, h^p \bmod o(\|h\|^r)$, когда h стремится к нулю.

2.5.2. Пусть, кроме того, γ — непрерывная полунорма на F; если для каждой точки z отрезка $[x, x + h]$ имеем $\| D^r f(z) \|_\gamma \leqslant M$, то

$$\|v_r(x; \; h)\|_\gamma \leqslant \frac{M}{r!} \|h\|^r.$$

2.5.3. Предположим дополнительно, что $E = \mathbf{R}^n$. Тогда

$$f(x+h) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant r} \Delta^\alpha f(x) h^\alpha \bmod o(\|h\|^r), \text{ когда } h \text{ стремится к } 0,$$

если положить

$$\Delta^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x).$$

2.5.4. Пусть f и g — две функции класса C^r на открытом в E подмножестве U со значениями в F. Для того чтобы f и g имели в точке x из U контакт порядка $\geqslant r$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого целого числа p, где $0 \leqslant p \leqslant r$, выполнялось соотношение $D^p f(x) = D^p g(x)$. Когда E конечномерно, это сводится к условию, что итерированные частные производные порядка $\leqslant r$ функций f и g (по отношению к некоторому базису в E) совпадают в точке x.

2.5.5. Пусть U — открытое подмножество в $E \times \mathbf{R}^n$ вида $V \times I_1 \times \cdots \times I_n$, где V открыто в E и $I_1, \ldots, I_n$ — открытые интервалы в $\mathbf{R}$, содержащие 0. Положим $U_0 = V$ и $U_j = V \times I_1 \times \cdots \times I_j$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. Если задана функция $f \in \mathcal{C}^r(U; F)$ (с $1 \leqslant r \leqslant \infty$), то существует одна и только одна такая последовательность функций $f_j \in \mathcal{C}^{r-1}(U_j; F)$ (для $0 \leqslant j \leqslant n$), что

$$f(x, t_1, \ldots, t_n) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{n} t_j f_j(x, t_1, \ldots, t_j)$$

для $x \in V$ и $t_j \in I_j$. Тогда

$$f_0(x) = f(x, 0, \ldots, 0),$$

$$f_j(x, t_1, \ldots, t_j) = \int_0^1 \partial_j f(x, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j u, 0, \ldots, 0)\, du$$

для $1 \leqslant j \leqslant n$. В этой последней формуле $\partial_j f$ означает j-ю частную производную функции $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(x, t_1, \ldots, t_n)$.

2.6. Критерии дифференцируемости

2.6.1. Предположим, что F, помимо своей топологии $\mathcal{T}$, наделено менее тонкой топологией $\mathcal{T}'$, относительно которой F также является отделимым локально выпуклым пространством. Предположим, кроме того, что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ удовлетворяют следующему условию:

(S) Для всякой окрестности V точки 0 относительно топологии $\mathcal{T}'$ существует такая окрестность W точки 0 относительно $\mathcal{T}$, что выпуклая $\mathcal{T}'$-замкнутая оболочка всякого $\mathcal{T}$-компактного подмножества в W содержится в V.

Пусть f — отображение открытого в E подмножества U в F. Предположим, что f принадлежит классу C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, коль скоро F наделено топологией $\mathcal{T}'$, что для всякой точки x из U и всякого целого числа $m \leqslant r$ производная $D^m f(x)$ есть полилинейное непрерывное отображение произведения E^m в пространство F, наделенное топологией $\mathcal{T}$, и что отображение $x \mapsto D^m f(x)$ из U в $\mathcal{L}_m(E; F)$ непрерывно (F наделено топологией $\mathcal{T}$). Тогда функция f принадлежит классу C^r, если наделить F топологией $\mathcal{T}'$, и ее производные $D^m f$ одинаковы для $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$.

Условие (S), в частности, реализовано, если существует фундаментальная система окрестностей точки 0 относительно топологии $\mathcal{T}$, замкнутых относительно топологии $\mathcal{T}'$: такой случай имеет место, если сопряженное пространство к пространству F, наделенному топологией $\mathcal{T}$, совпадает с сопряженным пространством к F, наделенному топологией $\mathcal{T}'$. Условие (S) также выполнено, если F, наделенное топологией $\mathcal{T}$, *квазиполно* (*Топ. вект. пр.*, гл. III, § 2, n° 5).

2.6.2. Пусть f — отображение открытого в E подмножества U в F. Если f принадлежит классу C^r (где $0 \leqslant r \leqslant \infty$), то скалярные функции $u \circ f$ принадлежат классу C^r для любой линейной непрерывной формы u на F. Обратно, если F *квазиполно* и функции $u \circ f$ принадлежат классу C^{r+1} для всякого $u \in F'$, то f принадлежит классу C^r.

§ 3. Вещественные или комплексные аналитические функции

В этом параграфе предполагается, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Через (E_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначается конечное семейство *нормированных* пространств над K, через E — произведение пространств E_i и через F — локально выпуклое отделимое топологическое векторное пространство над K.

3.1. Сходящиеся ряды

3.1.1. Пусть $f = \Sigma f_\alpha$ — формальный ряд, принадлежащий $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ (*Прил.*, n° A.5). Если γ — непрерывная полунорма на F и $R = (R_1, \dots, R_n)$ — последовательность строго положительных вещественных чисел, полагаем

$$\|f\|_{\gamma,R} = \sum_\alpha R^\alpha \|f_\alpha\|_\gamma .$$

Если F — нормированное пространство и γ — норма в F, вместо $\|f\|_{\gamma,R}$ пишут $\|f\|_R$.

Множество $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$ таких элементов $f \in \hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$, что $\|f\|_{\gamma,R}$ конечно для всякой непрерывной на F полунормы γ, есть векторное подпространство в $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$. Всякий раз, когда $R_i \geqslant R_i'$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, имеем

$$\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{H}_{R'}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Объединение всех

$$\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$$

есть векторное подпространство, обозначаемое через $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, пространства $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$; его элементы называются *сходящимися рядами* на произведении пространств E_i со значениями в F. Оно зависит лишь от топологии пространств E_i, а не от норм в них. Таким образом, можно говорить о пространстве $\mathcal{H}(H_1, \dots, E_n; F)$, коль скоро E_i суть нормируемые пространства, не выбирая норму в каждом E_i.

3.1.2. Отображение $f \mapsto \|f\|_{\gamma,R}$ есть полунорма на $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. Топология, которую определяют эти полунормы, когда γ

пробегает множество непрерывных полунорм на F (или просто какое-либо множество полунорм, определяющее топологию F), отделима. Если F нормируемо (соотв. полно), таково же и $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. Полунормы на $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, ограничения которых на каждое $\mathcal{H}_R$ непрерывны, определяют отделимую топологию на $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, зависящую лишь от топологий на E_i. Инъекция из $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ в $\widehat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ непрерывна.

3.1.3. Канонический изоморфизм из $\widehat{P}(E; F)$ на $\widehat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ посредством ограничения определяет изоморфизм топологических векторных пространств из $\mathcal{H}(E; F)$ на $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$.

3.1.4. Пусть $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, и пусть $J(f)$ — множество таких $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, что $f \in \mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. *Внутренность* $I(f)$ множества $J(f)$ называется *индикатрисой строгой сходимости* ряда f. Она есть множество таких R, для которых существует некоторый $R' \in J(f)$, такой, что $0 < R_i < R_i'$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Через $\Omega(f)$ обозначается множество точек вида $(\log R_1, \dots, \log R_n)$ в $\mathbf{R}^n$, где $R \in I(f)$; это *выпуклое* множество в $\mathbf{R}^n$.

Когда $n = 1$, множество $I(f)$ есть интервал $]0, \rho(f)[$ в $\mathbf{R}$, и $\rho(f)$ называется *радиусом строгой сходимости* ряда f. Это также верхняя грань (конечная или равная $+\infty$) множества вещественных чисел $R > 0$, таких, что для всякой непрерывной полунормы γ на F существует такая константа M, что

$$\|f_m\|_\gamma \leqslant MR^{-m} \quad (\text{где } f = \Sigma f_m,\ f_m \in P_m(E; F))$$

для всякого целого числа $m \geqslant 0$.

Множество таких точек $x = (x_i) \in E_1 \times \dots \times E_n$, что существует $R \in I(f)$, для которого $\|x_i\| \leqslant R_i$ при всяком i, называется *областью строгой сходимости* ряда f и обозначается через $C(f)$. Это также множество точек x, для которых существует $R \in J(f)$, такой, что $\|x_i\| < R_i$ для всякого i.

3.1.5. Для $f_\alpha \in P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ и всякой непрерывной полунормы γ на F положим

$$|||f_\alpha|||_\gamma = \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \|f_\alpha(x_1, \dots, x_n)\|_\gamma.$$

Тогда имеют место неравенства

$$|||f_\alpha|||_\gamma \leqslant \|f_\alpha\|_\gamma \leqslant \frac{\alpha^\alpha}{\alpha!} |||f_\alpha|||_\gamma.$$

Для $f = \sum f_\alpha \in \widehat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ и $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ положим

$$|||f|||_{\gamma, R} = \sum_\alpha R^\alpha\, |||f_\alpha|||_\gamma$$

и обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}_R(E_1, \ldots, E_n; F)$ векторное подпространство в

$$\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F),$$

образованное такими функциями f, что $|||f|||_{\gamma,R}$ конечно для всякого γ, и наделенное топологией, определяемой полунормами $f \mapsto |||f|||_{\gamma,R}$. Имеем $\mathcal{H}_R \subset \tilde{\mathcal{H}}_R$, и инъекция из $\mathcal{H}_R$ в $\tilde{\mathcal{H}}_R$ непрерывна. Пространство $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ есть объединение пространств $\tilde{\mathcal{H}}_R(E_1, \ldots, E_n; F)$, и его топология — наиболее тонкая локально выпуклая топология, делающая непрерывными инъекции из $\tilde{\mathcal{H}}_R$ в $\mathcal{H}$.

Если $f \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, то его *индикатрисой сходимости* называется внутренность $\tilde{I}(f)$ множества $\tilde{J}(f)$ тех $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, для которых $f \in \tilde{\mathcal{H}}_R$. Тогда

$$e^{-1}\tilde{I}(f) \subset I(f) \subset \tilde{I}(f)$$

(где e — основание натуральных логарифмов). Отправляясь от $\tilde{I}(f)$, определяем, как в n° 3.1.4., *область сходимости* $\tilde{C}(f)$ и, когда $n = 1$, *радиус сходимости* $\tilde{\rho}(f)$. Получаем, в частности, что

$$e^{-1}\tilde{\rho}(f) \leqslant \rho(f) \leqslant \tilde{\rho}(f).$$

3.1.6. Для $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ (замкнутым) *полишаром* в E с центром 0 и радиусом R называется множество $B(R)$ таких $x \in E$, что $\|x_i\| \leqslant R_i$ для всякого i. Если $\dim E_i = 1$, говорят также о *полидиске*. Если $f \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, то область сходимости (соотв. строгой сходимости) ряда f есть объединение полишаров $B(R)$ для $R \in \tilde{I}(f)$ (соотв. $R \in I(f)$).

3.1.7. Пусть $f \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Предположим, что пространство F *квазиполно*. Для всякой точки $x \in \tilde{C}(f)$ семейство элементов $f_\alpha(x)$ суммируемо в F. Его сумма, обозначаемая через $\hat{f}(x)$ или просто $f(x)$, есть непрерывная функция на $\tilde{C}(f)$. Более точно, для всякого R, такого, что $f \in \tilde{\mathcal{H}}_R$, семейство функций $f_\alpha(x)$ равномерно суммируемо по $x \in B(R)$. Отображение $f \mapsto \hat{f}$ есть непрерывное линейное отображение пространства $\tilde{\mathcal{H}}_R$ в пространство ограниченных непрерывных функций на $B(R)$, наделенное топологией равномерной сходимости.

3.1.8. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — отделимые полинормированные пространства, и пусть u — непрерывное m-линейное отображение произведения $F_1 \times \ldots \times F_m$ в F. Пусть $f_i \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Формальный ряд $u(f_1, \ldots, f_m)$ принадлежит $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Тогда

$$C(u(f_1, \ldots, f_m)) \supset \bigcap_i C(f_i),$$

$$\tilde{C}(u(f_1, \ldots, f_m)) \supset \bigcap_i \tilde{C}(f_i),$$

и если $x \in \bigcap_i \tilde{C}(f_i)$, причем F и F_i квазиполны, то

$$u(f_1, \ldots, f_m)(x) = u(f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

3.1.9. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — полные нормированные пространства, и предположим, что F квазиполно. Пусть $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, где $f_i \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F_i)$, и $g \in \mathcal{H}(F_1, \ldots, F_m; F)$ таковы, что $(f_i(0))_{1 \leqslant i \leqslant m}$ принадлежит области строгой сходимости ряда g. Тогда для всякого $\alpha \in \mathbf{N}^m$ формальный ряд $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ принадлежит $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ и семейство рядов $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ суммируемо в $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ и *a fortiori* в $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Его сумма будет обозначаться через $g \circ \mathbf{f}$.

Более точно, существуют такие $R \in \bigcap_i I(f_i)$ и $R' \in I(g)$, что $\|f_i\|_R < R'_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. При этих условиях формальный ряд $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ принадлежит $\mathcal{H}_R(E_1, \ldots, E_n; F)$ и семейство рядов $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ суммируемо в $\mathcal{H}_R(E_1, \ldots, E_n; F)$. Наконец, если $x \in B(R)$, то $\mathbf{f}(x) = (f_i(x))$ принадлежит $B(R') \subset F_1 \times \cdots \times F_m$ и

$$g(\mathbf{f}(x)) = (g \circ \mathbf{f})(x).$$

3.1.10. Предположим, что $E_i = K$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Пространство $\hat{P}(K^n; F)$ отождествляется тогда с пространством формальных рядов от n переменных $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами из F, и элемент из $\hat{P}(K^n; F)$ записывается в виде

$$f = \sum_\alpha X^\alpha c_\alpha, \text{ где } c_\alpha \in F.$$

Если $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ и γ — непрерывная полунорма на F, то

$$|||f|||_{\gamma,R} = \|f\|_{\gamma,R} = \sum_\alpha R^\alpha \|c_\alpha\|_\gamma.$$

Имеем $I(f) = \tilde{I}(f)$, $C(f) = \tilde{C}(f)$ и, если $n = 1$, то $\rho(f) = \tilde{\rho}(f)$.

Пространство $\mathcal{H}(K^n; K)$ сходящихся рядов с коэффициентами из K обозначается также через $K\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$; это подалгебра

в $K[[X_1, \ldots, X_n]]$. Пространство $\mathcal{H}(K^n;\ F)$ есть модуль над $K\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$, и, если F конечномерно, этот модуль отождествляется с $K\{\{X_1, \ldots, X_n\}\} \otimes_K F$.

3.1.11. Пусть $\mathbf{f} \in \mathcal{H}(K^n;\ K^m)$ представляется системой m сходящихся рядов $f_j(X_1, \ldots, X_n)$ с коэффициентами из K. Пусть, аналогично, $\mathbf{g} \in \mathcal{H}(K^m;\ K^p)$ представляется системой p сходящихся рядов $g_k(Y_1, \ldots, Y_m) = \Sigma g_{k,\beta} Y^\beta$. Элемент $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ из $\mathcal{H}(K^n;\ K^p)$ (см. 3.1.9) представляется системой p формальных рядов $h_k(X_1, \ldots, X_n)$, определяемых следующим образом: для $\alpha \in \mathbf{N}^n$ и $\beta \in \mathbf{N}^m$ пусть $c_{\alpha,\beta}$ — коэффициент при X^α в формальном ряде $\mathbf{f}^\beta = \prod f_j^{\beta_j}$; тогда семейство элементов $(g_{k,\beta} c_{\alpha,\beta})_{\beta \in \mathbf{N}^m}$ суммируемо в K и его суммой является коэффициент при X^α в h_k.

3.1.12. Предположим, что F квазиполно, и пусть $\hat{E}_i$ — пополнение пространства E_i. Всякий непрерывный многочлен на $E_1 \times \ldots \times E_n$ со значениями в F продолжается по непрерывности до непрерывного многочлена на $\hat{E}_1 \times \ldots \times \hat{E}_n$ со значениями в F. Отсюда получается биекция j пространства $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n;\ F)$ на $\hat{P}(\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_n;\ F)$. Если $f \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n;\ F)$, то $j(f) \in \mathcal{H}(\hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_n;\ F)$, и обратно. Индикатрисы строгой сходимости рядов f и $j(f)$ одинаковы.

3.1.13. Предполагается, что $K = \mathbf{R}$, но что F наделено структурой *комплексного* векторного пространства, согласованной со структурой вещественного векторного пространства. Пусть $E_i^{\mathbf{C}} = E_i \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Если $y \in E_i^{\mathbf{C}}$, положим

$$\|y\| = \inf \sum_k |a_k| \cdot \|x_k\|,$$

где нижняя грань распространяется на все конечные семейства пар $(x_k,\ a_k) \in E_i \times \mathbf{C}$, такие, что $y = \sum_k x_k \otimes a_k$. Получаем, таким образом, *норму* на комплексном векторном пространстве $E_i^{\mathbf{C}}$; эта норма продолжает данную норму на E_i, если условиться отождествлять $x \in E_i$ с $x \otimes 1$. Пусть h — непрерывный $\mathbf{R}$-многочлен на $E_1 \times \ldots \times E_n$ со значениями в F, однородный мультистепени α; существует тогда один и только один непрерывный $\mathbf{C}$-многочлен $\tilde{h}$ на $E_1^{\mathbf{C}} \times \ldots \times E_n^{\mathbf{C}}$ со значениями в F, продолжающий h и являющийся однородным мультистепени α. Тогда

$$\|\tilde{h}\|_\gamma = \|h\|_\gamma$$

для всякой непрерывной полунормы γ на комплексном векторном пространстве F.

Если $f = \sum_{\alpha} f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n;\ F)$, то $\tilde{f} = \sum_{\alpha} \tilde{f}_\alpha \in \mathcal{H}(E_1^{\mathbf{C}}, \ldots$ $\ldots, E_n^{\mathbf{C}};\ F)$. Ряды f и $\tilde{f}$ имеют одну и ту же индикатрису строгой сходимости (и одинаковый радиус строгой сходимости, если $n = 1$).

Обратно, предположим, что $K = \mathbf{C}$. Пусть E_i^0 и F^0 — пространства над $\mathbf{R}$, полученные сужением поля скаляров. Если $f_\alpha \in$ $\in P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$, то $f_\alpha \in P_\alpha(E_1^0, \ldots, E_n^0; F^0)$. Если $f =$ $= \sum_{\alpha} f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, то формальный ряд $f^0 = \sum_{\alpha} f_\alpha \in$ $\in \hat{P}(E_1^0, \ldots, E_n^0; F^0)$ является сходящимся. Индикатрисы сходимости (соотв. индикатрисы строгой сходимости) рядов f и f^0 идентичны, и $f(x) = f^0(x)$ для всякого $x \in \tilde{C}(f) = \tilde{C}(f^0)$.

3.2. *Аналитические функции*

3.2.1. Пусть U открыто в E и f — отображение множества U в F. Говорят, что f принадлежит *классу* C^ω, или *K-аналитично* (или просто *аналитично*) в U, если для всякой точки a из U существует такой сходящийся ряд $f_a \in \mathcal{H}(E;\ F)$, что $f(a + x) = f_a(x)$ для всякого x из E, достаточно близкого к нулю. Если $K = \mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$), говорят также, что f — *вещественно-аналитическое* (соотв. *комплексно-аналитическое* или *голоморфное*) отображение. Аналитические отображения из U в F образуют векторное подпространство, обозначаемое через $\mathcal{C}^\omega(U;\ F)$, в пространстве всех отображений из U в F.

Для $a \in U$ формальный ряд f_a единствен: он называется *разложением* функции f в *степенной ряд* в точке a. Если $f_a = \sum_{\alpha} (f_a)_\alpha$ (где $(f_a)_\alpha \in P_\alpha(E_1, \ldots, E_n;\ F)$), то полагаем

$$\Delta^\alpha f(a) = (f_a)_\alpha.$$

3.2.2. Если $f \in \mathcal{C}^\omega(U;\ F)$, то отображение $\Delta^\alpha f$: $a \mapsto \Delta^\alpha f(a)$ из U в

$$P_\alpha(E_1, \ldots, E_n;\ F)$$

аналитично. Отображение Δ^α: $f \mapsto \Delta^\alpha f$ есть K-линейное отображение из $\mathcal{C}^\omega(U;\ F)$ в $\mathcal{C}^\omega(U; P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F))$. Для $a \in U$ и $\alpha,\ \beta \in \mathbf{N}^n$ имеем, таким образом, $\Delta^\beta(\Delta^\alpha f)(a) \in P_\beta(E_1, \ldots, E_n;$ $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n;\ F))$. Если $x = (x_i) \in E$, имеем, стало быть, $(\Delta^\beta(\Delta^\alpha f)(a))(x) \in P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ и $((\Delta^\beta(\Delta^\alpha f)(a))(x))(x) \in F$.

Этот элемент из F равен $((\alpha,\ \beta))\,(\Delta^{\alpha+\beta} f\ (a))\,(x)$. Это выражается записью

$$\Delta^{\beta} \circ \Delta^{\alpha} = ((\alpha,\ \beta))\ \Delta^{\alpha+\beta}.$$

3.2.3. Индикатрисы строгой сходимости (и радиусы строгой сходимости, если $n = 1$) разложений в степенной ряд отображений f и $\Delta^{\alpha} f$ в одной и той же точке a из U идентичны.

3.2.4. Пусть $f \in \mathcal{C}^{\omega}\ (U;\ F)$. Тогда f *строго дифференцируемо* и бесконечно дифференцируемо в U (если $K = \mathbf{R}$, то f принадлежит классу C^{∞} в U). Итерированные производные отображения f аналитичны, и их значения в точке a суть полилинейные симметрические отображения. Можно тогда ввести обозначения $D^{\alpha} f$ для итерированных частных производных, как в n° 2.4.2. Имеем

$$\alpha\,!\ \Delta^{\alpha} f\ (a)\ (h) = D^{\alpha} f\ (a)\,.\,(h,\ \ldots,\ h),$$

каковы бы ни были $a \in U$ и $h \in E$, что записывается в виде

$$\alpha\,!\ \Delta^{\alpha} f = D^{\alpha} f.$$

3.2.5. Пусть множество U открыто в E и f, g — два аналитических отображения из U в F. Пусть $a \in U$. Для того чтобы f и g имели контакт порядка $\geqslant k$ в точке a, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta^{\alpha} f\ (a) = \Delta^{\alpha} g\ (a)$ для всякого α с $|\,\alpha\,| \leqslant k$. Если f и g имеют контакт бесконечного порядка в a, то они равны в окрестности точки a. Множество точек из U, в которых f и g имеют контакт бесконечного порядка, *открыто и замкнуто*.

В частности, если U *связно* и если существует непустое открытое подмножество в U, на котором f и g равны, то $f = g$ *(принцип аналитического продолжения)*.

3.2.6. Пусть U открыто в E и f — аналитическое отображение из U в F. Если его производная Df равна нулю, то f локально постоянно.

3.2.7. Предположим, что F квазиполно, и пусть G — полное нормированное пространство. Пусть g — аналитическое отображение открытого в E подмножества U в G, и пусть f — аналитическое отображение открытого в G подмножества V, содержащего $g\ (U)$, в F. Сквозное отображение $f \circ g$ аналитично в U. Предположим, кроме того, что $0 \in U$ и $g\ (0) = 0$. Разложение функции $f \circ g$ в степенной ряд в точке 0 получается тогда при подстановке в разложение функции f в 0 разложения в степенной ряд функции g в 0 (3.1.9).

3.2.8. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — отделимые полинормированные пространства и u — непрерывное полилинейное отображение из $F_1 \times \ldots \times F_m$ в F. Пусть U открыто в E и $f_i \in \mathcal{C}^\omega(U; F_i)$. Функция $u(f_1, \ldots, f_m)$ аналитична, и ее разложение в степенной ряд в точке $a \in U$ есть ряд $u((f_1)_a, \ldots, (f_m)_a)$ (3.1.8).

3.2.9. Предположим, что F квазиполно. Пусть $f \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$; функция $x \mapsto f(x)$ (3.1.7) аналитична в открытом множестве $C(f)$ — области строгой сходимости ряда f. Если $n = 1$ и $\| a \| < \rho(f)$, то радиус строгой сходимости разложения функции f в степенной ряд в точке a больше или равен $\rho(f) - \| a \|$. Если $\rho(f) = +\infty$, говорят, что f есть целая функция.

3.2.10. Сохраним предположения из 3.2.9. Если $K = \mathbf{C}$, результаты из 3.2.9 остаются в силе, если заменить $C(f)$ на $\tilde{C}(f)$ и $\rho(f)$ на $\tilde{\rho}(f)$ (для $n = 1$). Если $K = \mathbf{R}$, то функция $x \mapsto f(x)$ аналитична в $\tilde{C}(f)$.

3.2.11. Предположим, что $E_i = K$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть U открыто в K^n и $f \in \mathcal{C}^\omega(K^n; F)$. Если $0 \in U$ и если $f_0 = \sum_\alpha X^\alpha c_\alpha$ — разложение в степенной ряд функции f в 0, то разложение в степенной ряд функции $\Delta^\alpha f$ в 0 записывается (после отождествления $P_\alpha(K^n; F)$ с F) так:

$$(\Delta^\alpha f)_0 = \sum_\beta ((\alpha, \beta)) X^\beta c_{\alpha+\beta}.$$

В частности, для $1 \leqslant i \leqslant n$ и для $x \in C(f_0)$

$$\partial_i f(x) = \sum_\alpha (\alpha_i + 1) x^\alpha c_{\alpha+\varepsilon_i}.$$

3.3. Голоморфные функции

В этом пункте мы предполагаем, что $K = \mathbf{C}$.

3.3.1. Пусть F квазиполно. Предположим, что множество U открыто в E и f — отображение из U в F. Следующие условия эквивалентны:

(i) f голоморфно;

(ii) f дифференцируемо;

(iii) f локально ограничено и, каковы бы ни были $a \in U$ и $h \in E$, функция $t \mapsto f(a + th)$, определенная в открытой окрестности точки 0 в $\mathbf{C}$, голоморфна;

(iv) f локально ограничено и для любой непрерывной линейной формы u на F функция $u \circ f$ со значениями в $\mathbf{C}$ голоморфна;

(v) f непрерывно и локально ограничено, и существует тотальное множество H в сопряженном пространстве к F, такое, что $u \circ f$ голоморфно для всех $u \in H$.

Когда E — конечномерное пространство (соотв. когда F — банахово пространство), эти условия эквивалентны также условиям (iii′), (iv′) или (v′) (соотв. (iv′) или (v′)), которые получаются из условий (iii), (iv) или (v) (соотв. (iv) или (v)), если опустить требование, чтобы f было локально ограничено.

3.3.2. Предположим, что F квазиполно. Пусть U открыто в E и (f_n) — последовательность голоморфных отображений из U в F, обладающая следующим свойством:

(W) Каждая точка из U обладает окрестностью, в которой последовательность (f_n) равномерно сходится.

Тогда предел f последовательности (f_n) есть голоморфное отображение, последовательность производных (Df_n) (со значениями в квазиполном пространстве $\mathscr{L}(E; F)$) обладает свойством (W) и Df есть предел последовательности (Df_n).

3.3.3. Пусть U открыто в E и f — голоморфное отображение из U в пространство F, предполагаемое квазиполным. Пусть $R = (R_i) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, и предположим, что полишар $B(R)$ содержится в U и что f ограничено на $B(R)$. Тогда для всякого $\alpha \in \mathbf{N}^n$ и всякого $x = (x_i) \in B(R)$

$$\Delta^\alpha f(0)(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\mathbf{e}(\theta_1)x_1, \ldots, \mathbf{e}(\theta_n)x_n)\,\mathbf{e}(-\alpha_1\theta_1 - \ldots$$
$$\ldots - \alpha_n\theta_n)\,d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

(где $\mathbf{e}(\theta) = \exp 2\pi i\theta$).

Пусть дополнительно γ — непрерывная полунорма на F, и пусть M — верхняя грань чисел $\|f(x)\|_\gamma$ для $\|x_i\| = R_i$. Имеем $\|\Delta^\alpha f(0)(x)\|_\gamma \leqslant M$ для всякого $x \in B(R)$ и $|||\Delta^\alpha f(0)|||_\gamma \leqslant MR^{-\alpha}$. Наконец, область сходимости разложения в ряд функции f в точке 0 содержит внутренность полишара $B(R)$.

3.3.4. Сохраним предположения из 3.3.3 и предположим, кроме того, что $E_i = \mathbf{C}$. Пусть $\sum_\alpha X^\alpha c_\alpha$ — разложение в ряд функции f в 0. Тогда

$$c_\alpha = R^{-\alpha}\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\mathbf{e}(\theta_1)R_1, \ldots, \mathbf{e}(\theta_n)R_n)\,\mathbf{e}(-\alpha_1\theta_1 - \ldots$$
$$\ldots - \alpha_n\theta_n)\,d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

и

$$\|c_\alpha\|_\gamma \leqslant R^{-\alpha} \sup_{x \in B(R)} \|f(x)\|_\gamma$$

(*неравенства Коши*). Область строгой сходимости ряда $\sum_\alpha X^\alpha c_\alpha$ содержит внутренность полишара $B(R)$.

3.3.5. Предположим, что E конечномерно и F квазиполно. Пусть f — голоморфное отображение из E в F. Тогда в $\mathcal{H}(E; F)$ существует один и только один ряд f_0 с бесконечным радиусом сходимости (для всякой нормы на E), такой, что $f(x) = f_0(x)$ для всякого $x \in E$.

3.3.6. Если f — такое голоморфное отображение из E в F, что $f(E)$ *ограничено*, то функция f постоянна (*теорема Лиувилля*).

3.3.7. Предполагаем, что $E \neq 0$. Пусть f — голоморфное отображение открытого в E подмножества U в F. Пусть a — точка из U и γ — непрерывная полунорма на F. Для всякой окрестности V точки a, содержащейся в U, существует такая точка $x \in V$, $x \neq a$, что

$$\|f(a)\|_\gamma \leqslant \|f(x)\|_\gamma.$$

Если дополнительно $F = \mathbf{C}$ и если f не постоянно в окрестности точки a, то $|f(a)| < \sup\limits_{x \in V, x \neq a} |f(x)|$ и отображение f *открыто* в некоторой окрестности точки a. Наконец, пусть B — открытое подмножество с замыканием, содержащимся в U, и пусть B' — его граница. Тогда

$$\sup_{x \in \overline{B}} |f(x)| = \sup_{x \in B'} |f(x)|$$

(*принцип максимума*).

3.3.8. Предположим, что E конечномерно. Пусть множество U открыто в E, S — векторное подпространство в E коразмерности $\geqslant 2$ и f — голоморфное отображение из $U \cap (E - S)$ в F. Тогда f продолжается по непрерывности до голоморфного отображения множества U в F.

3.3.9. Предположим, что $E = \mathbf{C}$, и пусть $0 \leqslant \lambda < \mu \leqslant +\infty$. Пусть f — голоморфное отображение открытого множества $U = \{z \in \mathbf{C} \mid \lambda < |z| < \mu\}$ в F. Существует одно и только одно такое семейство $(a_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ элементов из F, что для всякого компакта H в U семейство $(a_n(f) z^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ равномерно суммируемо, когда z пробегает H, и его сумма равна $f(z)$ (*разложение Лорана*).

Предположим дополнительно, что $\lambda = 0$. *Порядком* функции f в точке $x = 0$ называется нижняя грань (конечная или бесконечная) множества таких целых чисел n, что $a_n(f) \neq 0$. Если существует такая окрестность V точки 0, что f ограничена в $V - \{0\}$, то f имеет порядок $\geqslant 0$ в точке $x=0$ и продолжается по непрерывности до голоморфной функции на открытом множестве $|z| < \mu$. Пусть p — целое число > 0; если f имеет порядок $-p$ в точке $x = 0$, говорят, что 0 есть *полюс порядка* p функции f.

3.3.10. Предположим, что $E = \mathbf{C}$ и что F нормировано. Пусть f — такое голоморфное отображение открытого единичного диска U пространства E в F, что $f(0) = 0$, и пусть $M = \sup\limits_{z \in U} \| f(z) \|$. Тогда $\| f(z) \| \leqslant M \cdot |z|$ для всякого $z \in U$ (*лемма Шварца*).

3.4. Вещественно-аналитические функции

Предположим, что $K = \mathbf{R}$.

3.4.1. Пусть U открыто в E и f — отображение из U в F, предполагаемое квазиполным.

Следующие условия эквивалентны:

(i) f аналитично;

(ii) f принадлежит классу C^∞ и для каждого $a \in U$ существуют такие окрестность V_a точки a и вещественное число M, что для всякой непрерывной на F полунормы γ существует такая константа A_γ, что

$$\| \Delta^\alpha f(x) \|_\gamma \leqslant A_\gamma M^{|\alpha|} \text{ для всякого } x \in V_a \text{ и всякого } \alpha \in \mathbf{N}^n.$$

3.4.2. Пусть U открыто в E и f — отображение из U в F. Если F квазиполно и если сопряженное к нему пространство F' есть пространство Бэра, то f аналитично тогда и только тогда, когда $u \circ f$ аналитично для всякого $u \in F'$.

§ 4. Аналитические функции (ультраметрический случай)

В этом параграфе предполагается, что абсолютное значение поля K *ультраметрическое*. Через $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ обозначается конечное семейство *нормированных* пространств над K и через E — произведение пространств E_i, наделенное нормой

$$\|x\| = \sup \|x_i\|, \text{ если } x = (x_i).$$

Через F обозначается *отделимое* полинормированное пространство над K.

4.1. Сходящиеся ряды

4.1.1. Пусть $f = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha$ — формальный ряд, принадлежащий $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$ (см. приложение). Если γ — непрерывная полунорма на F и $R = (R_i)$ — система из n вещественных чисел > 0, полагаем

$$\|f\|_{\gamma,R} = \sup_\alpha \|f_\alpha\|_\gamma R^\alpha .$$

Определения и результаты из n° 3.1.1 (второй абзац) и из n° 3.1.2 используются без изменений; мы определяем, в частности, пространства

$$\mathscr{H}_R(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ и } \mathscr{H}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

4.1.2. Канонический изоморфизм j из $\hat{P}(E; F)$ на $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$ определяет посредством ограничения изоморфизм топологических векторных пространств из $\mathscr{H}_R(E; F)$ на $\mathscr{H}_{(R, \ldots, R)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ для всякого $R \in \mathbf{R}_+^*$; он доставляет также изоморфизм из $\mathscr{H}(E; F)$ на $\mathscr{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Более точно, если $f = \sum\limits_m f_m \in \hat{P}(E; F)$ и если $j(f) = \sum\limits_\alpha f_\alpha$, то для всякой непрерывной полунормы γ на F выполняются равенства

$$\|f_m\|_\gamma = \sup_{|\alpha|=m} \|f_\alpha\|_\gamma,$$

$$\|f\|_{\gamma,R} = \|j(f)\|_{\gamma,(R, \ldots, R)}.$$

4.1.3. Пусть $f = \sum_{\alpha} f_\alpha$ — элемент из $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$; пусть $I(f)$ — множество таких $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, что для всякой непрерывной полунормы γ на F произведение $\| f_\alpha \|_\gamma R^\alpha$ стремится к нулю, когда $|\alpha|$ стремится к бесконечности. Множество $I(f)$ непусто; оно называется *индикатрисой строгой сходимости* ряда f. Множество $\Omega(f)$ точек

$$(\log R_1, \ldots, \log R_n) \quad \text{для} \quad R \in I(f)$$

есть *выпуклое* множество в $\mathbf{R}^n$.

Когда $n = 1$, множество $I(f)$ есть интервал в $\mathbf{R}$, открытый слева и открытый или замкнутый справа; его верхняя грань (конечная или равная $+\infty$) обозначается через $\rho(f)$ и называется *радиусом строгой сходимости* ряда f.

В обозначениях из 4.1.2 имеем $R \in I(f)$ тогда и только тогда, когда

$$(R, \ldots, R) \in I(j(f)).$$

Множество точек $x = (x_i)$, для которых существует $R = (R_i) \in I(f)$ с $\| x_i \| \leqslant R_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, называется *областью строгой сходимости* ряда f и обозначается через $C(f)$. Это открытое множество в E, являющееся объединением полишаров

$$B(R) = \{x \in E \mid \|x_i\| \leqslant R_i \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

при $R \in I(f)$.

4.1.4. Результаты из 3.1.7 и 3.1.8 остаются в силе, если заменить всюду $\tilde{C}(f)$ на $C(f)$ и $\tilde{\mathcal{H}}_R$ на $\mathcal{H}_R$.

4.1.5. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — полные нормированные пространства, и предположим, что F квазиполно. Пусть $\mathfrak{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, где $f_i \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F_i)$ и $g \in \mathcal{H}(F_1, \ldots, F_m; F)$ таковы, что точка $(f_i(0))_{1 \leqslant i \leqslant m}$ из E принадлежит области строгой сходимости ряда g. Тогда для всякого $\alpha \in \mathbf{N}^m$ формальный ряд $g_\alpha \circ \mathfrak{f}$ принадлежит $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, и семейство элементов $g_\alpha \circ \mathfrak{f}$ суммируемо в $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ (стало быть, a fortiori в $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$). Его сумма будет обозначаться через $g \circ \mathfrak{f}$.

Точнее, существуют такие $R \in \bigcap_i I(f_i)$ и $R' \in I(g)$, что $\sup_{|\alpha|>0} \| f_{i,\alpha} \| R^\alpha < R'_i$ (для $1 \leqslant i \leqslant m$). При этих условиях формальный ряд $g_\alpha \circ \mathfrak{f}$ принадлежит $\mathcal{H}_R(E_1, \ldots, E_n; F)$, и семейство элементов $g_\alpha \circ \mathfrak{f}$ суммируемо в $\mathcal{H}_R(E_1, \ldots, E_n; F)$. Наконец, если $x \in B(R)$, то $\mathfrak{f}(x) = (f_i(x))$ принадлежит $C(g)$ и

$$g(\mathfrak{f}(x)) = (g \circ \mathfrak{f})(x).$$

Предположим дополнительно, что для каждого i существует такое семейство (e_j^i) элементов из E_i, что всякий элемент x из E_i есть сумма такого суммируемого семейства $(\lambda_j e_j^i)$ (где $\lambda_j \in K$), что $\| x \| = \sup_j | \lambda_j |$. Тогда в предыдущем абзаце можно заменить условие $\sup_{|\alpha|>0} \| f_{i,\alpha} \| R^\alpha < R_i'$ условием $\| f_i \|_R \leqslant R_i'$.

4.1.6. Предположим, что $E_i = K$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Пространство $\widehat{P}(K^n; F)$ отождествляется тогда с пространством формальных рядов от n неизвестных $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами в F, и элемент f из $\widehat{P}(K^n; F)$ записывается в виде

$$f = \sum_\alpha X^\alpha c_\alpha \quad \text{с } c_\alpha \in F.$$

Если $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ и если γ — непрерывная полунорма на F, то

$$\| f \|_{\gamma,R} = \sup \| c_\alpha \|_\gamma . R^\alpha .$$

Последний абзац из 3.1.10 остается справедливым, равно как и 3.1.11.

4.1.7. Предположим, что K — замкнутое подполе полного нормированного поля L (которое тогда также является ультраметрическим). Для $y \in E_i \otimes_K L$ положим

$$\| y \| = \inf (\sup_k | a_k | . \| x_k \|),$$

где нижняя грань берется по всем таким конечным семействам пар $(x_k, a_k) \in E_i \times L$, что $y = \sum_k x_k \otimes a_k$. Получаем, таким образом, норму на векторном L-пространстве $E_i \otimes_K L$, которая индуцирует на E_i данную норму. Через E_i^L обозначим пополнение пространства $E_i \otimes_K L$ по этой норме.

Пусть теперь F — полное отделимое векторное L-пространство. Для всякого однородного мультистепени α непрерывного K-многочлена f_α на $E_1 \times \ldots \times E_n$ со значениями в полинормированном векторном K-пространстве F_K, лежащем ниже пространства F, существует один и только один непрерывный L-многочлен $\widetilde{f}_\alpha$, однородный той же мультистепени, определенный на $E_1^L \times \ldots \times E_n^L$ и со значениями в F, который продолжает f_α. Для всякой непрерывной полунормы на векторном L-пространстве F справедливо равенство

$$\| \widetilde{f}_\alpha \|_\gamma = \| f_\alpha \|_\gamma .$$

Если $f = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F_K)$, то $\tilde{f} = \sum\limits_{\alpha} \tilde{f}_\alpha \in \mathcal{H}(E_1^L, \ldots$ $\ldots, E_n^L; F)$. Ряды f и $\tilde{f}$ имеют одинаковую индикатрису строгой сходимости (и даже одинаковый радиус строгой сходимости, если $n = 1$).

Обратно, пусть L — замкнутое недискретное подполе в K, и пусть E_i^0 и F_i^0 — пространства над L, полученные из E_i и F сужением поля скаляров. Если $f = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, то $f_\alpha \in P_\alpha(E_1^0, \ldots, E_n^0; F^0)$; если положить $f^0 = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha \in \hat{P}(E_1^0, \ldots$ $\ldots, E_n^0; F^0)$, то $f^0 \in \mathcal{H}(E_1^0, \ldots, E_n^0; F^0)$. Тогда $C(f) \subset C(f^0)$ и $f(x) = f^0(x)$ для всякого $x \in C(f)$.

4.2. *Аналитические функции*

4.2.1. Определения и результаты из 3.2.1 и 3.2.2 остаются в силе без изменений.

4.2.2. В обозначениях из 3.2.2 индикатриса строгой сходимости разложения в степенной ряд функции $\Delta^\alpha f$ в точке a из U содержит индикатрису строгой сходимости разложения в степенной ряд функции f в точке a.

4.2.3. Результаты из 3.2.4, 3.2.5, 3.2.7, 3.2.8 и 3.2.11 остаются в силе. Результаты из 3.2.6 — также при дополнительном условии *равенства нулю характеристики* поля K.

4.2.4. Предположим, что F квазиполно, и пусть $f \in \mathcal{H}(E_1, \ldots$ $\ldots, E_n; F)$. Функция $x \mapsto f(x)$ аналитична в $C(f)$. Для всякого $a \in C(f)$ индикатриса сходимости разложения в степенной ряд функции f в точке a равна индикатрисе сходимости ряда f.

4.3. *Некоторые неравенства*

4.3.1. Предполагается, что K удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:

(a) поле классов вычетов поля K бесконечно;

(b) образ поля K при отображении $a \mapsto |a|$ плотен в $\mathbf{R}_+$. (Другими словами, предполагается, что K *не локально компактно.*)

Пусть $f = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, и пусть $R \in I(f)$. Имеем

$$\sup_{x \in B(R)} \|f(x)\|_\gamma = \sup_{\alpha} \sup_{x \in B(R)} \|f_\alpha(x)\|_\gamma$$

для всякой непрерывной полунормы γ на F (*неравенства Коши*).

4.3.2. Существует такая константа $a > 0$, что для всякого однородного непрерывного многочлена $f_\alpha \in P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ и всякого $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ выполняется неравенство

$$a^{|\alpha|} R^\alpha |\alpha!| \|f_\alpha\|_\gamma \leqslant \sup_{x \in B(R)} \|f_\alpha(x)\|_\gamma \leqslant \|f_\alpha\|_\gamma R^\alpha$$

для всякой непрерывной полунормы γ на F. Если K удовлетворяет условию (b) из 4.3.1 или если образ пространства E_i относительно отображения $x \mapsto \|x\|$ содержится в образе поля K относительно отображения $a \mapsto |a|$ и содержит R_i (для $1 \leqslant i \leqslant n$), то можно взять $a = 1$.

4.3.3. Если K имеет характеристику нуль, то формальный ряд $f = \sum_\alpha f_\alpha$ принадлежит $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ тогда и только тогда, когда существует такой $R \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, что

$$\sup_\alpha \sup_{x \in B(R)} \|f_\alpha(x)\|_\gamma < +\infty$$

для всякой непрерывной полунормы γ на F.

§ 5. Многообразия

5.1. Карты и атласы. Многообразия

5.1.1. Пусть X — множество. *Картой* на X называется тройка $c = (U, \varphi, E)$, где U — подмножество в X, E — банахово пространство и φ — биекция из U на открытое подмножество в E. Говорят, что U есть *область определения* карты c. Если E имеет конечную размерность n, говорят, что c имеет размерность n. В противном случае полагаем $\dim c = +\infty$.

5.1.2. Говорят, что две карты $c = (U, \varphi, E)$ и $c' = (U', \varphi', E')$ на X C^r-согласованы (или просто согласованы, если не может быть неясности относительно r), когда выполняются следующие условия:

(a) $\varphi(U \cap U')$ (соотв. $\varphi'(U \cap U')$) открыто в E (соотв. E');

(b) отображение $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ (соотв. $\varphi' \circ \varphi^{-1}$) из $\varphi'(U \cap U')$ на $\varphi(U \cap U')$ (соотв. из $\varphi(U \cap U')$ на $\varphi'(U \cap U')$) принадлежит классу C^r (см. 2.3.1, 3.2.1 и 4.2.1).

5.1.3. C^r-атласом (или просто атласом) множества X называется множество попарно C^r-согласованных карт на X, объединение областей определения которых есть все X. Два атласа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ множества X называются C^r-эквивалентными, если $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ является атласом. Отношение C^r-эквивалентности между атласами есть отношение эквивалентности.

5.1.4. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество банаховых пространств. Говорят, что атлас $\mathcal{A}$ имеет *тип* $\mathfrak{S}$, если $E \in \mathfrak{S}$ для всякой карты $c = (U, \varphi, E)$ из $\mathcal{A}$. Аналогичным образом, говорят, что атлас $\mathcal{A}$ имеет *гильбертов тип* (соотв. *гильбертов тип счетной размерности*), если E есть гильбертово пространство (соотв. счетномерное гильбертово пространство) для всякой карты (U, φ, E) из $\mathcal{A}$.

5.1.5. *K-многообразием класса* C^r (или многообразием класса C^r над K, или просто многообразием, когда не может быть неясности относительно K и r) называется множество X, наделенное классом эквивалентности атласов (*Теор. множ.*, гл. II, § 6, n° 9) относительно отношения C^r-эквивалентности. Атлас этого класса называет-

ся атласом многообразия X. Карта, принадлежащая атласу многообразия X, называется картой на многообразии X. Карта на X, область определения которой содержит точку $a \in X$, называется *картой на X в a*. Карта, *центрированная в a*, есть такая карта (U, φ, E) на X в a, что $\varphi(a) = 0$.

Если X — множество и $\mathcal{A}$ — атлас множества X, то множество X, наделенное классом эквивалентности, содержащим $\mathcal{A}$, называется многообразием, определенным атласом $\mathcal{A}$.

Если $r \neq \omega$ (стало быть, $K = \mathbf{R}$), многообразие класса C^r иногда называется *дифференцируемым многообразием*. Многообразие класса C^ω называется также *аналитическим многообразием* над K (или K-*аналитическим* многообразием). Если к тому же $K = \mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}_p$), говорят также о *вещественно-аналитическом* (соотв. *комплексно-аналитическом, аналитическом p-адическом*) многообразии.

5.1.6. Пусть X — многообразие. Подмножества в X, являющиеся объединениями областей определения карт на X, образуют семейство открытых множеств в топологии, про которую говорят, что она лежит ниже структуры многообразия на X. Для всякой карты $c = (U, \varphi, E)$ на X отображение φ есть *гомеоморфизм* открытого множества U, наделенного индуцированной из X топологией, на открытое в E подмножество $\varphi(U)$.

Топологическое пространство, лежащее ниже X, есть *пространство Бэра*. Когда K равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, оно локально связно.

Пусть X — многообразие и $\mathcal{A}$ — атлас многообразия X. Для того, чтобы топологическое пространство X было *отделимо*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: каковы бы ни были карты (U, φ, E) и (V, ψ, F), принадлежащие атласу $\mathcal{A}$, график отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$ из $\varphi(U \cap V)$ в $\psi(U \cap V)$ *замкнут* в $\varphi(U) \times \psi(V)$.

Пусть X — многообразие; предположим, что топологическое пространство X *регулярно*. Тогда для всякой точки $a \in X$ существует карта (U, φ, E) на X в a, обладающая следующим свойством: для того чтобы подмножество Y в U было *замкнуто* в X, необходимо и достаточно, чтобы его образ $\varphi(Y)$ был *замкнут* в E. Если пространство X паракомпактно, на X существует расстояние, согласованное с топологией в X и превращающее X в полное метрическое пространство.

5.1.7. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество банаховых пространств. Говорят, что некоторое многообразие имеет *тип* $\mathfrak{S}$ (соотв. *гильбертов тип*, соотв. *гильбертов тип счетной размерности*), если оно обладает атласом типа $\mathfrak{S}$ (соотв. гильбертова типа, соотв. гильбертова типа счетной размерности). Если $\mathfrak{S}$ сводится к единственному элементу E,

многообразие типа $\mathfrak{S}$ называется также *чистым* многообразием типа E.

Чистым многообразием размерности n называется чистое многообразие типа K^n. Говорят, что многообразие *локально конечномерно*, если оно имеет тип $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S} = \{K^n;\ n \in \mathbf{N}\}$.

5.1.8. Пусть X — многообразие и $x \in X$. Размерность (конечная или равная $+\infty$) карты на X в x зависит лишь от x. Она называется *размерностью многообразия* X *в* x и обозначается через $\dim_x X$. *Размерностью* многообразия X, обозначаемой через $\dim X$, называется верхняя грань чисел $\dim_x X$ для $x \in X$.

Функция $x \to \dim_x X$ локально постоянна. Многообразие X локально конечномерно (соотв. чисто и имеет размерность n) тогда и только тогда, когда $\dim_x X < +\infty$ (соотв. $\dim_x X = n$) для всякого $x \in X$.

5.1.9. Предположим, что K локально компактно. Топологическое пространство, лежащее ниже локально конечномерного многообразия, локально компактно тогда и только тогда, когда оно отделимо.

5.1.10. Пусть X — многообразие, и пусть $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — отображения множества U, лежащего в X, в K. Говорят, что $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ есть *система координат* на X в U, если тройка (U, ξ, K^n) есть карта на X; эта карта обозначается также через $(U;\ \xi)$ или $(U;\ \xi^1, \ldots, \xi^n)$. Если $a \in U$, говорят также, что ξ есть *система координат на* X *в* a; если, кроме того, $\xi^i(a) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то говорят, что система координат ξ *центрирована* в a.

5.2. Примеры многообразий

5.2.1. Пусть X — множество; на X существует единственная структура многообразия, для которой нижележащее топологическое пространство дискретно; эта структура есть структура чистого многообразия размерности 0.

5.2.2. Пусть E — банахово пространство. Тройка $c = (E, \mathrm{Id}_E, E)$ есть карта на E, и $\mathcal{A} = \{c\}$ есть атлас множества E. Стало быть, последний определяет на E структуру чистого многообразия типа E; нижележащая топология есть данная топология на E. Когда в дальнейшем будет говориться о структуре многообразия на E, это всегда будет относиться к предыдущей структуре.

В частности, это приложимо ко всякому конечномерному векторному пространству над K, наделенному единственной отделимой

топологией, согласованной с векторной структурой (*Топ. вект. пр.*, гл. I, § 2, n° 3).

5.2.3. Пусть X — многообразие и U — *открытое* подмножество в X. На U существует структура многообразия, карты которой суть карты на многообразии X, с областью определения, содержащейся в U. Про эту структуру говорят, что она *индуцирована* структурой многообразия X (см. n° 5.3.4); наделенное этой структурой U называется *открытым подмногообразием* в X.

В частности, всякое открытое подмножество банахова пространства E наделено канонической структурой чистого многообразия типа E. Пусть X — многообразие; для того чтобы тройка (U, φ, E) была картой на X, необходимо и достаточно, чтобы U было открыто в X и φ было изоморфизмом открытого в X многообразия U на открытое подмногообразие в E.

5.2.4. Пусть X — множество и $(X_i)_{i \in I}$ — покрытие множества X. Предположим, что на каждом X_i задана такая структура многообразия, что выполнено следующее условие:

Каковы бы ни были i и j из I, множество $X_i \cap X_j$ открыто в X_i и в X_j и структуры многообразий на $X_i \cap X_j$, индуцированные соответствующими структурами на X_i и X_j, совпадают.

Тогда на X существует одна и только одна такая структура многообразия, что X_i есть открытое подмногообразие в X для каждого i из I. Говорят, что многообразие X получено *склеиванием* многообразий X_i.

5.2.5. Пусть X — многообразие. Множество X_n таких точек x из X, что $\dim_x X = n$ (n — целое число $\geqslant 0$), есть открытое подмногообразие в X, которое чисто и имеет размерность n.

5.2.6. Пусть E — банахово пространство. Множество $\mathbf{G}(E)$ векторных подпространств в E, допускающих топологическое дополнение, можно следующим образом наделить структурой аналитического многообразия: для всякой пары $(F_0, G_0) \in \mathbf{G}(E) \times \mathbf{G}(E)$, такой, что $E = F_0 \oplus G_0$, через U_{G_0} обозначается множество тех $F \in \mathbf{G}(E)$, которые допускают G_0 в качестве дополнения. Определим биекцию φ_{F_0, G_0} из U_{G_0} на банахово пространство $\mathcal{L}(F_0; G_0)$ путем сопоставления всякому $F \in U_{G_0}$ отображения из F_0 в G_0, график которого есть подпространство F в $E = F_0 \times G_0$. Карты $(U_{G_0}, \varphi_{F_0, G_0}, \mathcal{L}(F_0; G_0))$ образуют атлас множества $\mathbf{G}(E)$. Наделенное структурой многообразия, определяемой этим атласом, $\mathbf{G}(E)$ называется *грассмановым многообразием* пространства E.

Топологическое пространство $\mathbf{G}(E)$ метризуемо. Если K локально компактно и E конечномерно, то $\mathbf{G}(E)$ компактно.

Для всякого целого числа $n \geqslant 0$ множество $\mathbf{G}_n(E)$ (соотв. $\mathbf{G}^n(E)$) элементов F из $\mathbf{G}(E)$ размерности (соотв. коразмерности) n открыто и замкнуто в $\mathbf{G}(E)$ и является открытым чистым подмногообразием в $\mathbf{G}(E)$. Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}_n(E)$ связно для всякого n.

Отображение, сопоставляющее элементу $F \in \mathbf{G}(E)$ его ортогональное дополнение в сопряженном к E пространстве E', есть морфизм из $\mathbf{G}(E)$ в $\mathbf{G}(E')$, индуцирующий изоморфизм из $\mathbf{G}^n(E)$ на $\mathbf{G}_n(E')$ для всякого целого числа n.

Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ или если E конечномерно, то $\mathbf{G}_1(E)$ есть не что иное, как *проективное пространство,* определяемое пространством E, которое, таким образом, наделяется структурой аналитического многообразия.

5.3. Функции класса C^r и морфизмы многообразий

5.3.1. Пусть X — многообразие класса C^r, F — отделимое полинормированное пространство и f — отображение из X в F. Говорят, что f принадлежит *классу* C^r, если для всякой карты (V, φ, E) на X отображение $f \circ \varphi^{-1}$ из $\varphi(V)$ в F принадлежит классу C^r. На самом деле достаточно выполнения этого условия для карт одного атласа многообразия X. Множество отображений класса C^r из X в F образует векторное подпространство в пространстве всех отображений из X в F. Оно обозначается через $\mathcal{C}^r(X; F)$.

Когда $F = K$, полагаем $\mathcal{C}^r(X; K) = \mathcal{C}^r(X)$; это K-подалгебра алгебры отображений из X в K. Элементы из $\mathcal{C}^r(X)$ называются также *морфическими функциями.*

Когда X есть открытое подмножество банахова пространства, эта терминология согласуется с терминологией n°n° 2.3.1, 3.2.1 и 4.2.1.

5.3.2. Пусть X и Y — два многообразия класса C^r, и пусть f — отображение из X в Y. Говорят, что f принадлежит *классу* C^r, или является *морфизмом многообразий* (класса C^r), если оно непрерывно и если для всякой карты (V, ψ, F) на Y отображение $\psi \circ f$ открытого подмногообразия $f^{-1}(V)$ в банахово пространство F принадлежит классу C^r. Для этого достаточно, чтобы существовал такой атлас $\mathcal{A}$ многообразия Y, что для всякой карты $(V, \psi, F) \in \mathcal{A}$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в X и что отображение $\psi \circ f$ открытого в X подмногообразия $f^{-1}(V)$ в F принадлежит классу C^r. Множество морфизмов из X в Y обозначается через $\mathcal{C}^r(X; Y)$. Когда Y есть банахово пространство, наделенное канонической структурой многообразия, определения в 5.3.1 и 5.3.2 согласованы. Отображение

класса C^ω называется также *K-аналитическим* (или просто аналитическим) *отображением*. Когда $K = \mathbf{C}$, говорят также о голоморфном отображении.

Пусть (U, φ, E) — карта на X и (V, ψ, F) — карта на Y, такие, что $f(U) \subset V$. Отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ открытого в E подмножества $\varphi(U)$ в открытое в F подмножество $\psi(V)$ называется *представлением* отображения f в данных картах.

5.3.3. Предположим, что X и Y конечномерны; пусть $a \in X$, $b \in Y$ и f — отображение из X в Y с $f(a) = b$. Предположим сначала, что f принадлежит классу C^r, и рассмотрим системы координат $(U; \xi^1, \ldots, \xi^m)$ на X в a и $(V; \eta^1, \ldots, \eta^n)$ на Y в b соответственно, причем $f(U) \subset V$. Пусть ξ — отображение $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ из U в K^m. Существуют тогда такие функции u^j класса C^r на открытом в K^m подмножестве $\xi(U)$ со значениями в K, что координаты точки $y = f(x)$ из Y (для x из U) задаются формулами

$$(1) \qquad \eta^j(y) = u^j(\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

что эквивалентным образом записывается в виде

$$(2) \qquad \eta^j \circ f = u^j(\xi^1, \ldots, \xi^m) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Говорят, что предыдущие формулы осуществляют *представление* отображения f в выбранных системах координат.

Обратно, если для всякой точки a из X можно найти *некоторую* систему координат на X в a и *некоторую* систему координат на Y в $b = f(a)$, удовлетворяющие предыдущим условиям, то f принадлежит классу C^r.

5.3.4. Морфизмы многообразий удовлетворяют аксиомам из *Теор. множ.*, гл. IV, § 2:

a) Композиция двух морфизмов есть морфизм.

b) Для того чтобы биекция $f = X \to Y$ была изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы f и f^{-1} были морфизмами.

5.3.5. Предположим, что $r = \omega$. Пусть X — многообразие и f, g — два аналитических отображения из X в отделимое полинормированное пространство или в *отделимое* аналитическое многообразие. Множество точек, в некоторой окрестности которых f и g совпадают, *открыто и замкнуто в X*.

5.3.6. Предположим, что $K = \mathbf{R}$ и $r \neq \omega$. Говорят, что многообразие X *допускает разбиения единицы класса C^r*, если для всякого локально конечного открытого покрытия пространства X существует непрерывное разбиение единицы (*Top. gén.*, chap. IX, § 4,

n° 3), подчиненное этому покрытию и образованное функциями класса C^r.

Пусть E — банахово пространство; рассмотрим следующее свойство:

(PU) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые подмножества A и B в E, существует такая функция класса C^r на E со значениями в* $\mathbf{R}$, *что* $f(x) = 0$ *для* $x \in A$, $f(x) = 1$ *для* $x \in B$ *и* $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *для всякого* $x \in E$.

Если $\mathfrak{S}$ — множество банаховых пространств, обладающих свойством (PU), то всякое паракомпактное многообразие типа $\mathfrak{S}$ допускает разбиения единицы класса C^r.

Всякое конечномерное пространство и всякое гильбертово пространство счетной размерности обладают свойством (PU).

5.3.7. Предположим, что K — ультраметрическое поле. Пусть X — паракомпактное многообразие. Для всякого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства X существует разбиение этого пространства на одновременно открытые и замкнутые подмножества, подчиненное покрытию $\mathfrak{U}$.

5.3.8. Предположим, что K локально компактно. Пусть X и Y — два чистых многообразия конечной размерности и f — морфизм из X в Y. Если $\dim X < \dim Y$ и если топология в X допускает счетный базис открытых множеств, то $f(X)$ есть *тощее* множество в Y.

5.4. Характеризация многообразий их пучками функций

5.4.1. Пусть X — топологическое пространство и Y — множество. Предположим, что для каждого открытого подмножества U пространства X задано множество $\mathcal{L}(U)$ отображений из U в Y. Мы скажем, что семейство $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(U)\}$ есть *пучок функций со значениями в* Y, если оно удовлетворяет следующему условию:

Пусть $(U_i)_{i\in I}$ *— семейство открытых подмножеств пространства* X, *объединение которых есть* U, *и пусть* f *— отображение из* U *в* Y; *для того чтобы* f *принадлежало* $\mathcal{L}(U)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f|U_i$ *принадлежало* $\mathcal{L}(U_i)$ *для каждого* i *из* I.

5.4.2. Пусть X и Y — два многообразия; для всякого открытого подмножества $U \subset X$ пусть $\mathcal{L}(U)$ — множество морфизмов из U в Y; тогда $\mathcal{L}$ есть пучок функций со значениями в Y.

Когда $Y = K$, определенный таким образом пучок обозначается через $\mathcal{C}^r_X$.

5.4.3. Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — множество банаховых пространств. Для всякого $E \in \mathfrak{S}$ пусть $\mathcal{F}_E$ — некоторый пучок функций на X со значениями в E. Предположим, что семейство пучков $\mathcal{F}_E$ для $E \in \mathfrak{S}$ удовлетворяет следующему условию:

Для всякой точки $x \in X$ существуют такие открытая окрестность U этой точки, пространство $E_0 \in \mathfrak{S}$ и гомеоморфизм φ из U на открытое подмножество в E_0, что для всякого открытого подмножества $V \subset U$ и всякого $E \in \mathfrak{S}$ множество $\mathcal{F}_E(V)$ состоит из функций $g \circ \varphi$, где g пробегает пространство $\mathcal{C}^r(\varphi(V); E)$.

Тогда на X существует одна и только одна структура многообразия класса C^r типа $\mathfrak{S}$, согласованная с данной топологией на X, для которой $\mathcal{F}_E$ есть пучок функций класса C^r на X со значениями в E.

5.4.4. Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{F}$ — пучок функций со значениями в K, удовлетворяющий следующему условию: для всякой точки $x \in X$ существуют такие целое число n, открытая окрестность U точки x и гомеоморфизм φ из U на открытое подмножество в K^n, что для всякого открытого $V \subset U$ множество $\mathcal{F}(V)$ состоит из функций $g \circ \varphi$, где g пробегает множество функций класса C^r на открытом в K^n подмножестве $\varphi(V)$.

Тогда на X существует одна и только одна такая структура локально конечномерного многообразия, что $\mathcal{F} = \mathcal{C}^r_X$.

5.4.5. Пусть X и X' — два локально конечномерных многообразия класса C^r и f — непрерывное отображение из X в X'. Для того чтобы f было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого в X' подмножества U' и всякой функции $g \in \mathcal{C}^r(U'; K)$ функция $g \circ f$ принадлежала $\mathcal{C}^r(U; K)$, где $U = \overset{-1}{f}(U')$.

5.5. *Касательные пространства, касательные линейные отображения.*

5.5.1. Пусть X — многообразие, и пусть $a \in X$. Рассмотрим пары (c, h), где $c = (U, \varphi, E)$ — карта на многообразии X и где h — элемент из E. Две такие пары (c, h) и (c', h') называются эквивалентными, если производная в $\varphi(a)$ отображения $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ (которое определено в окрестности элемента $\varphi(a)$) преобразует h в h'. Получаем, таким образом, отношение эквивалентности между парами (c, h), и *касательным вектором к X в точке a* называется класс эквивалентных пар (c, h) (*Теор. множ.*, гл. II, § 6, n° 9).

Касательные векторы к X в точке a образуют множество, обозначаемое через $T_a(X)$. Если $c = (U, \varphi, E)$ — карта на многообразии

X в a, отображение θ_c из E в $T_a(X)$, ставящее в соответствие элементу h из E касательный вектор, представляемый парой (c, h), есть *биекция*. Если перенести на $T_a(X)$ с помощью θ_c структуру топологического векторного K-пространства E, то получаемая таким образом структура не зависит от выбора c и превращает $T_a(X)$ в банахово пространство, называемое *касательным пространством к X в точке a*. Размерность (конечная или $+\infty$) пространства $T_a(X)$ равна размерности многообразия X в a.

5.5.2. Пусть X, Y — два многообразия, f — морфизм из X в Y и a — точка в X. Рассмотрим карту $c = (U, \varphi, E)$ на X в a и карту $c' = (V, \psi, F)$ на Y в b, где $f(U) \subset V$; отображение $\Phi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ из $\varphi(U)$ в F принадлежит классу C^r, и его производная $D\Phi(\varphi(a))$ в точке $\varphi(a)$ есть непрерывное линейное отображение пространства E в F. Непрерывное линейное отображение $\theta_{c'} \circ D\Phi(\varphi(a)) \circ \theta_c^{-1}$ из $T_a(X)$ в $T_b(Y)$ не зависит от выбранных карт c и c'; оно обозначается через $T_a(f)$ и называется *касательным линейным отображением к f в a*. Если g — морфизм из Y в многообразие Z, то

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}(g) \circ T_a(f).$$

5.5.3. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм многообразий. Если f локально постоянен, то $T_a(f) = 0$ для всякого a из X. Обратно, если $T_a(f) = 0$ для всякого $a \in X$ и если поле K имеет *характеристику* 0, то f локально постоянен.

5.5.4. Пусть U — открытое подмножество многообразия X и f — каноническая инъекция из U в X; для всякой точки a из U отображение $T_a(f)$ из $T_a(U)$ в $T_a(X)$ есть изоморфизм топологических векторных пространств, с помощью которого мы будем в дальнейшем *отождествлять* эти два пространства.

5.5.5. Пусть U — открытое подмножество банахова пространства E; если ι — каноническая инъекция из U в E, то тройка $c = (U, \iota, E)$ есть карта на U, и атлас $\{c\}$ определяет на U структуру многообразия. Если задана точка a в U, отображение θ_c есть изоморфизм топологического векторного пространства E на топологическое векторное пространство $T_a(U)$; обратный изоморфизм будет обозначаться через $\zeta_E(a)$.

Пусть f — отображение класса C^r из U в открытое подмножество V банахова пространства F; для всякой точки a из U имеем

$$Df(a) \circ \zeta_E(a) = \zeta_F(f(a)) \circ T_a(f),$$

где $Df(a)$ — производная функции f в a (1.2.1). Другими словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_a(U) & \xrightarrow{T_a(f)} & T_{f(a)}(V) \\ \downarrow{\scriptstyle \zeta_E(a)} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_F(f(a))} \\ E & \xrightarrow{Df(a)} & F \end{array}$$

коммутативна.

5.5.6. *Кокасательным вектором к X в a*, или *касательным ковектором*, или просто *ковектором в a* называется всякая непрерывная линейная форма на топологическом векторном пространстве $T_a(X)$; эти ковекторы, стало быть, суть элементы пространства $T_a(X)'$, топологически сопряженного к касательному пространству к X в a. Это пространство наделяется топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах в $T_a(X)$; наделенное этой топологией, $T_a(X)'$ становится банаховым пространством, которое называется *кокасательным пространством к X в a*. Оно обозначается также через $T_a(X)$.

Пусть f — морфизм из X в банахово пространство E. *Дифференциалом морфизма f в точке a*, обозначаемым через d_af или df_a, называется непрерывное линейное отображение $\zeta_E(f(a))\circ T_a(f)$ из $T_a(X)$ в E. Для $t \in T_a(X)$ через $t(f)$, или $t.f$, обозначается иногда значение $d_af(t)$ линейного отображения d_af в точке t. Отображение $f \mapsto d_af$ линейно.

Если $E = K$, дифференциал d_af морфизма f в a есть ковектор к X в a.

Пусть E, F, G — три банаховых пространства, и пусть $(u, v) \mapsto u.v$ — непрерывное билинейное отображение из $F\times G$ в E. Пусть f (соотв. g) — морфизм из X в F (соотв. G). Тогда отображение $f.g: x \mapsto f(x).g(x)$ есть морфизм из X в E и для каждого $t \in T_a(X)$

$$d_a(f.g)(t) = f(a).d_ag(t) + d_af(t).g(a).$$

Возьмем, в частности, $G = E$ и $F = K$, причем рассматриваемое билинейное отображение есть умножение. Тогда

$$d_a(fg) = f(a)\,d_ag + g(a)\,d_af.$$

5.5.7. Пусть X — локально конечномерное многообразие, и пусть $\xi^1, \ldots, \xi^m$ — морфические функции, определенные в открытой окрестности U точки a в X. Следующие условия эквивалентны:

(i) существует такая открытая окрестность V точки a, содержащаяся в U, что функции $\xi^i|V$ (для $1 \leqslant i \leqslant m$) образуют систему координат на X в V;

(ii) дифференциалы $d_a\xi^i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ образуют базис в $T_a(X)'$;

(iii) отображение $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ из U в K^m этально в a (см. n° 5.7.6).

Для того чтобы дифференциалы $d_a\xi^1, \ldots, d_a\xi^m$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность V точки a, содержащаяся в U, что функции $\xi^i|V$ образуют часть системы координат на X в V.

5.5.8. Пусть X — локально конечномерное многообразие и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ — система координат на X в открытом подмножестве U. Пусть $a \in U$; через $(\partial_{1,a}, \ldots, \partial_{m,a})$ обозначается базис касательного пространства $T_a(X)$, дуальный к базису $(d_a\xi^1, \ldots, d_a\xi^m)$ в $T_a(X)'$. Стало быть,

$$\partial_{i,a}(\xi^j) = \delta_{ij} \quad \text{(символ Кронекера)}.$$

Касательный вектор $\partial_{i,a}$ обозначается также через $(\partial/\partial\xi^i)_a$.

Пусть f — функция класса C^r на U со значениями в банаховом пространстве E. Через $\partial_i f$ или $\partial f/\partial\xi^i$ обозначается функция $a \mapsto \partial_{i,a}(f)$; это функция класса C^{r-1} на U со значениями в E (непрерывная функция, если $r = 1$). Ее значение в точке a из U обозначается иногда через $(\partial f/\partial\xi^i)_a$. Для всякого $t \in T_a(X)$ имеем

$$d_a f(t) = \sum_{i=1}^{m} d_a\xi^i(t) \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(a),$$

что можно еще записать в виде

$$d_a f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(a)\, d_a\xi^i .$$

Эти обозначения согласуются с обозначениями в 1.6.3.

5.5.9. Пусть X и Y — два многообразия и f — морфизм из X в Y. *Рангом* морфизма f в точке a из X, обозначаемым через $\mathrm{rg}_a f$, называется ранг (конечный или равный $+\infty$) линейного отображения $T_a(f)$. Отображение $a \mapsto \mathrm{rg}_a f$ полунепрерывно снизу.

5.6. Произведения многообразий

5.6.1. Пусть X и X' — два множества, и пусть $c = (U, \varphi, E)$ (соотв. $c' = (U', \varphi', E')$) — карта на X (соотв. на X'). Тройка

$$(U \times U', \varphi \times \varphi', E \times E')$$

есть карта на множестве $X \times X'$, обозначаемая через $c \times c'$.

5.6.2. Пусть X и X' — два многообразия класса C^r. На множестве $X \times X'$ существует одна и только одна такая структура многообразия класса C^r, что $c \times c'$ есть карта на $X \times X'$ для всякой карты c на X и всякой карты c' на X'. Наделенное этой структурой, $X \times X'$ называется *произведением многообразий* X и X'. Аналогично определяется произведение конечного числа многообразий. Топология многообразия $X \times X'$ есть произведение топологий на X и X'. Для $a \in X$ и $b \in X'$ имеет место равенство

$$\dim_{(a,b)}(X \times X') = \dim_a X + \dim_b X'.$$

5.6.3. Пусть X и X' — два многообразия и $X \times X'$ — их произведение. Пусть $a \in X$ и $a' \in X'$. Канонические проекции

$$\mathrm{pr}_1 : X \times X' \to X \text{ и } \mathrm{pr}_2 : X \times X' \to X'$$

суть морфизмы. Пусть π_i $(i = 1, 2)$ — их касательные линейные отображения в точке (a, a'). Отображение

$$(\pi_1, \pi_2) : T_{(a,a')}(X \times X') \to T_a(X) \times T_{a'}(X')$$

есть *изоморфизм*, что позволяет *отождествить касательное пространство к* $X \times X'$ *в* (a, a') *с произведением* $T_a(X) \times T_{a'}(X')$.

Инъекция из $T_a(X)$ в $T_{(a,a')}(X \times X')$, получающаяся вследствие этого отождествления, есть касательное линейное отображение в точке a к морфизму $x \mapsto (x, a')$ из X в $X \times X'$; аналогичный результат имеет место для инъекции из $T_{a'}(X')$ в $T_{(a,a')}(X \times X')$.

5.6.4. Пусть W, X и X' — три многообразия, и пусть $f : W \to X$, $f' : W \to X'$ — два отображения. Для того чтобы отображение

$$(f, f') : W \to X \times X'$$

было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы f и f' были морфизмами (это оправдывает употребление термина «произведение», см. *Теор. множ.*, гл. IV, § 2, n° 4). В этом случае, если a — точка из W, то получаем

$$T_a(f, f') = (T_a(f), T_a(f')),$$

учитывая сделанное выше отождествление.

5.6.5. Пусть $f : X \to Y$ и $f' : X' \to Y'$ — морфизмы многообразий. Тогда $f \times f' : X \times X' \to Y \times Y'$ есть морфизм. Если $a \in X$ и $a' \in X'$, то

$$T_{(a,a')}(f \times f') = T_a(f) \times T_{a'}(f'),$$

$$\mathrm{rg}_{(a,a')}(f \times f') = \mathrm{rg}_a f + \mathrm{rg}_{a'} f'.$$

5.6.6. Пусть X_1, X_2 и Z — три многообразия и f — морфизм из $X_1 \times X_2$ в Z. Пусть $a \in X_1$ и $b \in X_2$. Касательное линейное

отображение к частичному отображению $x \mapsto f(x, b)$ (соотв. $y \mapsto f(a, y)$) из X_1 (соотв. X_2) в Z обозначается через $T^1_{(a,b)}(f)$ (соотв. $T^2_{(a,b)}(f)$). Если отождествить $T_{(a,b)}(X_1 \times X_2)$ с $T_a(X_1) \times T_b(X_2)$, то получаем, что

$$T_{(a,b)}(f) . (u, v) = T^1_{(a,b)}(f) . u + T^2_{(a,b)}(f) . v$$

для всякого $u \in T_a(X_1)$ и всякого $v \in T_b(X_2)$.

5.6.7. (*Теорема о неявных функциях.*) В предположениях и обозначениях предыдущего пункта предположим дополнительно, что $T^2_{(a,b)}(f)$ *биективно.* Тогда существуют открытая окрестность U точки a в X_1 и открытая окрестность V точки b в X_2, обладающие следующим свойством: *для всякой точки $x \in U$ существует одна и только одна такая точка $g(x)$ в V, что $f(x, g(x)) = f(a, b)$ и отображение g есть морфизм из U в V.* Для всякой точки $x \in U$ справедлива формула

$$T_x(g) = -(T^2_{(x,g(x))}(f))^{-1} \circ T^1_{(x,g(x))}(f).$$

5.7. Иммерсии, этальные морфизмы

5.7.1. Пусть X и Y — два многообразия, f — морфизм из X в Y и a — точка из X. Положим $b = f(a)$. Следующие условия эквивалентны:

(i) Линейное отображение $T_a(f)$ инъективно и его образ есть замкнутое векторное подпространство в $T_b(Y)$, допускающее топологическое дополнение [1]).

(ii) Существуют такие банахово пространство F, замкнутое векторное подпространство E в F, допускающее топологическое дополнение, и карты (U, φ, E) на X в a и (V, ψ, F) на Y в b, что $f(U) \subset V$ и $\varphi = \psi \circ (f \mid U)$.

(iii) Существуют такие открытая окрестность U точки a, открытая окрестность V точки b, содержащая $f(U)$, многообразие Z, точка c в Z и изоморфизм многообразий g из $U \times Z$ на V, что $f(x) = g(x, c)$ для всякого $x \in U$.

(iv) Существуют открытая окрестность U точки a, открытая окрестность V точки b и морфизм q из V в X, такой, что $f(U) \subset V$ и $q(f(x)) = x$ для всякого $x \in U$.

Когда X и Y конечномерны, предыдущие условия эквивалентны также следующему:

(v) Существуют открытая окрестность U точки a, система коор-

[1]) Всякое замкнутое векторное подпространство банахова пространства конечной коразмерности допускает топологическое дополнение; если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, это же справедливо для всякого конечномерного векторного подпространства (обязательно замкнутого).

динат $(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ на Y в открытой окрестности V точки b, содержащей $f(U)$, и целое число $m \leqslant n$, такие, что $\eta^j \circ f = 0$ для $m < j \leqslant n$ и что функции $\eta^1 \circ f, \ldots, \eta^m \circ f$ образуют систему координат на X в U.

Если свойства (i) — (iv) выполнены, говорят, что f есть *иммерсия в* точке a.

Множество точек, в которых f является иммерсией, открыто в X; если это открытое множество совпадает со всем X, говорят, что f есть *иммерсия*.

Для того чтобы f был иммерсией, необходимо и достаточно, чтобы можно было покрыть X такими открытыми множествами U_i, что $f \mid U_i$ для всякого i есть изоморфизм из U_i на подмногообразие в Y (см. n° 5.8.3).

5.7.2. *Примеры.*

(a) Если X — открытое подмножество многообразия Y, то каноническая инъекция из X в Y есть иммерсия.

(b) Пусть E и F — два банаховых пространства и u — непрерывное линейное отображение из E в F. Отображение u является иммерсией тогда и только тогда, когда u есть изоморфизм из E на замкнутое векторное подпространство в F, допускающее топологическое дополнение.

5.7.3. Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — два морфизма. Если f и g — иммерсии, то $g \circ f$ есть иммерсия. Обратно, если $g \circ f$ — иммерсия, то f есть иммерсия. Если $f: X \to Y$ и $f': X' \to Y'$ — иммерсии, то $f \times f'$ есть иммерсия.

5.7.4. Предположим, что X и Y — *конечномерные* многообразия над *полем K характеристики* 0. Если $f: X \to Y$ — инъективный морфизм, то множество тех точек из X, в которых f является иммерсией, является *плотным* открытым подмножеством в X. При $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ этот результат остается справедливым, если предполагать только, что X конечномерно.

5.7.5. Пусть $f: X \to Y$ — иммерсия и g — *непрерывное* отображение многообразия Z в X. Для того чтобы g было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ g$ было морфизмом.

5.7.6. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм, и пусть a лежит в X. Следующие два свойства эквивалентны:

(i) $T_a(f)$ *биективно.*

(ii) Существуют такие открытая окрестность U точки a и открытая окрестность V точки $f(a)$, что f индуцирует изоморфизм из U на V.

Когда эти свойства выполнены, говорят, что f — *локальный изоморфизм в точке* a или что f *этален в* a. Если это имеет место для всякого $a \in X$, говорят, что f *этален*, или что X *этально над* Y (относительно f) [1]). Для того чтобы морфизм был этален, необходимо и достаточно, чтобы он был одновременно иммерсией (n° 5.7.1) и субмерсией (n° 5.9.1).

5.7.7. Пусть $f : X \to Y$ — иммерсия; предположим, что X — чистое многообразие конечной размерности. Тогда морфизм f этален в каждом из следующих двух случаев:

(i) $\dim Y = \dim X$;

(ii) f сюръективен и топология в X допускает счетную базу открытых множеств.

5.7.8. Для того чтобы морфизм f был изоморфизмом на открытое подмногообразие (соотв. изоморфизмом), необходимо и достаточно, чтобы f был этален и инъективен (соотв. этален и биективен).

5.8. Обратные образы структур многообразия, подмногообразия

5.8.1. Пусть X — топологическое пространство, Y — многообразие и f — отображение из X в Y. Рассмотрим следующие условия:

(QR) (соотв. (R)). *Для всякого* $a \in X$ *существуют такие открытая окрестность* U *точки* a *в* X *и карта* (V, φ, E) *на многообразии* Y *в* $f(a)$, *что* $f(U) \subset V$ *и что* $\varphi \circ f$ *индуцирует гомеоморфизм из* U *на пересечение множества* $\varphi(V)$ *с замкнутым* (соотв. *замкнутым и допускающим топологическое дополнение*) *векторным подпространством* F *пространства* E.

Если условие (QR) выполнено, на X существует одна и только одна структура многообразия, для которой тройки $(U, \varphi \circ f, F)$ (в обозначениях условия (QR)) суть карты на X. Эта структура называется *обратным образом* структуры многообразия на Y относительно f. Ее топология есть топология пространства X.

Для того чтобы на X существовала структура многообразия, согласованная с данной топологией и для которой f было бы *иммерсией*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (R). Эта структура тогда единственна; она есть обратный образ структуры многообразия на Y относительно f.

5.8.2. Приведенное выше условие (R) заведомо выполнено, если для всякой точки $a \in X$ существует такая открытая окрестность U этой точки, что $f \mid U$ есть гомеоморфизм окрестности U на открытое

[1]) В оригинале имеется еще один вариант: f есть «un étalement», для которого мы не нашли русского эквивалента при принятом способе перевода термина «étale».— *Прим. перев.*

подмножество в Y. В этом случае получаемое многообразие X этально над Y (5.7.6).

5.8.3. Предположим теперь, что X — топологическое подпространство в Y, причем f — каноническая инъекция. Если f удовлетворяет условию (R) (соотв. (QR)) из n° 5.8.1, говорят, что X, наделенное обратным образом относительно f структуры многообразия на Y, есть *подмногообразие* (соотв. *квазиподмногообразие*) в Y. Всякое подмногообразие есть квазиподмногообразие.

Всякое квазиподмногообразие *локально замкнуто;* всякое открытое подмножество есть подмногообразие относительно структуры, определенной в n° 5.2.3.

Когда Y локально конечномерно, топологическое подпространство X пространства Y есть подмногообразие в Y тогда и только тогда, когда для всякой точки $a \in X$ существуют такие открытая окрестность U этой точки в Y, система координат $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ на Y в U и целое число $k \leqslant m$, что $U \cap X$ есть множество точек из U, в которых одновременно обращаются в нуль функции ξ^i для $1 \leqslant i \leqslant k$.

Пусть $f: X \to Y$ — морфизм многообразий. Предположим, что f — *иммерсия* и что она индуцирует *гомеоморфизм* из X на $f(X)$. Тогда $f(X)$ есть подмногообразие в Y и f индуцирует изоморфизм из X на $f(X)$; в этом случае говорят, что f есть *погружение* многообразия X в Y.

5.8.4. Пусть Y и W — два многообразия, X — подмногообразие в Y и f — отображение из X в W. Для того чтобы f было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $a \in X$ существовали такие окрестность U этой точки в Y и морфизм $g: U \to W$, что g совпадает с f на $U \cap X$.

5.8.5. Пусть X — квазиподмногообразие многообразия Y и g — отображение многообразия Z в X. Предположим, что K имеет характеристику 0 или что X есть подмногообразие в Y. Для того чтобы g было морфизмом из Z в X, необходимо и достаточно, чтобы оно было морфизмом из Z в Y; другими словами, структура многообразия на X *индуцирована* структурой многообразия на Y (*Теор. множ.,* гл. IV, § 2, n° 4).

5.8.6. Если X — подмногообразие (соотв. квазиподмногообразие) в Y и если Y — подмногообразие многообразия Z, то X есть подмногообразие (соотв. квазиподмногообразие) в Z.

5.8.7. Пусть X_i (для $i = 1, 2$) — многообразие, и пусть Y_i — подмногообразие (соотв. квазиподмногообразие) в X_i (для $i = 1, 2$).

Тогда $Y_1 \times Y_2$ есть подмногообразие (соотв. квазиподмногообразие) в $X_1 \times X_2$.

5.8.8. Пусть X — квазиподмногообразие многообразия Y; пусть x — точка в X, и обозначим через f каноническую инъекцию из X в Y. Отображение $T_x(f) : T_x(X) \to T_x(Y)$ инъективно, и оно позволяет *отождествить пространство* $T_x(X)$ *с замкнутым векторным подпространством в* $T_x(Y)$. Топологическое векторное фактор-пространство $T_x(Y)/T_x(X)$ есть банахово пространство; его называют *трансверсальным пространством* в точке x к X (в Y). Его размерность (конечная или $+\infty$) называется *коразмерностью* квазиподмногообразия X в Y в точке x.

Если, более того, X есть *подмногообразие* в Y, то пространство $T_x(X)$ допускает топологическое дополнение в $T_x(Y)$.

5.8.9. Пусть f — отображение многообразия X в многообразие Y, и пусть Γ — его график. Для того чтобы f было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

(i) Γ есть подмногообразие в $X \times Y$.

(ii) Для всякого $(x, y) \in \Gamma$ имеем

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_{(x,y)}(\Gamma) \oplus T_y(Y).$$

Если это так, то отображение pr_1 индуцирует *изоморфизм* из Γ *на* X и $T_{(x,y)}(\Gamma)$ отождествляется с графиком отображения $T_x(f)$.

В частности, диагональ в $X \times X$ есть подмногообразие в $X \times X$.

5.8.10. Пусть Y — многообразие и $(f_i)_{i \in I}$ — конечное семейство морфических функций на Y. Пусть X — множество таких $x \in Y$, что $f_i(x) = 0$ для всякого i. Сделаем следующее предположение:

(J) Для всякого $x \in X$ дифференциалы $d_x f_i$ линейно независимы в $T'_x(Y)$.

Тогда X есть замкнутое подмногообразие в Y и касательное пространство $T_x(X)$ есть подпространство в $T_x(Y)$, образованное такими α, что $\alpha \,.\, f_i = 0$ для всякого i из I. Более того, коразмерность подмногообразия X в Y равна $\mathrm{Card}(I)$ в каждой его точке.

5.8.11. (*Простые точки идеала.*) Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал алгебры многочленов $K[X_1, \ldots, X_n]$. Точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в K^n называется *нулем* идеала $\mathfrak{a}$, если $f(x) = 0$ для всякого $f \in \mathfrak{a}$. Если $x \in K^n$, обозначим через S_x подалгебру в $K(X_1, \ldots, X_n)$, образованную дробями f/g, где $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ и $g(x) \neq 0$; обозначим через $\mathfrak{a}_x$ идеал в S_x, порожденный в S_x идеалом $\mathfrak{a}$. Точка x называется *простым нулем* идеала $\mathfrak{a}$, если она есть нуль идеала $\mathfrak{a}$ и если выполнено следующее условие:

(S) Существует конечная последовательность $(f_1, \ldots, f_m)$ элементов

из $\mathfrak{a}$, порождающих идеал $\mathfrak{a}_x$, дифференциалы которых в точке x линейно независимы. (Это условие эквивалентно тому, что локальное кольцо $S_x/\mathfrak{a}_x$ *регулярно* (*Alg. comm.*, à paraître).)

Пусть Z (соотв. Z_s) — множество нулей (соотв. простых нулей) идеала $\mathfrak{a}$. Множество Z замкнуто в K^n, Z_s открыто в Z и Z_s есть *подмногообразие* в K^n. Если $x \in Z_s$, идеал $K[X_1, \ldots, X_n] \cap \mathfrak{a}_x$ образован многочленами f, обращающимися в нуль в окрестности точки x в Z_s.

Пусть $\bar{\mathfrak{a}}$ — идеал многочленов, равных нулю на Z. Если K алгебраически замкнуто, множество простых нулей идеала $\bar{\mathfrak{a}}$ плотно в Z.

5.8.12. Пусть X — многообразие и L — множество пар (x, Z), где x — точка из X и Z — подмногообразие в X, содержащее x. Если заданы две пары $\pi = (x, Z)$ и $\pi' = (x', Z')$, мы обозначаем через $R\{\pi, \pi'\}$ отношение:

«Имеет место равенство $x = x'$ и существует такая окрестность U точки x, что $U \cap Z = U \cap Z'$».

Тогда R есть отношение эквивалентности в L; через $\gamma_x(Z)$ обозначается класс эквивалентности пары $(x, Z) \in L$. На множестве $J = L/R$ существует одна и только одна структура многообразия, удовлетворяющая следующему условию:

Для всякого подмногообразия Z в X отображение $x \mapsto \gamma_x(Z)$ из Z в J есть изоморфизм из Z на открытое подмногообразие в J.

Говорят, что J есть *многообразие ростков подмногообразий многообразия* X (см. *Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 6, n° 10).

Отображение $\rho\colon J \to X$, определенное формулой $\rho(\gamma_x(Z)) = x$, есть иммерсия; она называется канонической иммерсией многообразия J в X.

Если X — *отделимое аналитическое* многообразие конечной размерности, таково же и J.

5.9. Субмерсии и фактормногообразия

5.9.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий, a — точка в X, и положим $b = f(a)$. Следующие условия эквивалентны:

(i) Линейное отображение $T_a(f)$ *сюръективно*, и его ядро допускает топологическое дополнение в $T_a(X)$.

(ii) Существуют такие карта (U, φ, E) на X в a, карта (V, ψ, F) на Y в b и сюръективное непрерывное линейное отображение u из E в F, что

$$f(U) \subset V, \quad \psi \circ f = u \circ \varphi$$

и что ядро отображения u допускает топологическое дополнение в E.

(iii) Существуют такие открытая окрестность U точки a, открытая окрестность V точки b, содержащая $f(U)$, и морфизм g из U в многообразие Z, что отображение (f, g) из U в $V \times Z$ есть изоморфизм.

(iv) Существуют такие открытая окрестность V точки b и морфизм s из V в X, что $s(b) = a$ и $f(s(y)) = y$ для всякого y из V *(локальное сечение)*.

Когда X и Y *конечномерны*, предыдущие условия эквивалентны также следующему условию:

(v) Существуют такие открытая окрестность U точки a, открытая окрестность V точки b, содержащая $f(U)$, и система координат $(\eta^1, \ldots$ $\ldots, \eta^n)$ на V, что функции $\eta^i \circ f$ на U составляют часть некоторой системы координат на U.

Если свойства (i) — (iv) выполнены, говорят, что f есть *субмерсия в точке a*. Множество точек, в которых f является субмерсией, открыто в X; если это открытое множество совпадает со всем X, говорят, что f есть *субмерсия*.

5.9.2. Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — два морфизма. Если f и g — субмерсии, таков же и $g \circ f$; обратно, если $g \circ f$ — субмерсия и если f сюръективен, то g есть субмерсия.

5.9.3. Если $f: X \to Y$ и $f': X' \to Y'$ — субмерсии, то $f \times f': X \times$ $\times X' \to Y \times Y'$ есть субмерсия.

5.9.4. Субмерсия $f: X \to Y$ есть *открытое* отображение (см. *Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 5, n° 1); в частности, отношение эквивалентности R, определенное отображением f, *открыто*, f определяет при переходе к фактору *гомеоморфизм из X/R на* $f(X)$ и $f(X)$ *открыто* в Y.

5.9.5. Пусть R — отношение эквивалентности на многообразии X. Говорят, что R *регулярно*, если на факторпространстве X/R существует такая структура многообразия, что каноническая проекция $p: X \to X/R$ есть субмерсия; эта структура многообразия тогда единственна. Она есть *факторструктура* структуры на X (*Теор. множ.*, гл. IV, § 2, n° 6); другими словами, для того чтобы отображение g из X/R в многообразие Y было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $g \circ p$ было морфизмом из X в Y.

Пусть $C \subset X \times X$ — график отношения R. Для того чтобы R было регулярно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

(i) *C есть подмногообразие в $X \times X$.*

(ii) *Отображение* pr_1 *из C на X есть субмерсия.*

Условие (ii) означает также, что, если a и b конгруэнтны по модулю R, существуют такие открытая окрестность U точки a и

морфизм s из U в X, что $s(a) = b$ и что $s(x)$ конгруэнтен x по модулю R для всякого $x \in U$.

Предположим, что R регулярно. Для того чтобы фактормногообразие X/R было отделимо, необходимо и достаточно, чтобы график отношения R был замкнут в $X \times X$.

5.9.6. Пусть X и X' — два многообразия, R и R' — регулярные отношения эквивалентности на X и X', и пусть $f: X \to X'$ — морфизм, согласованный с отношениями R и R'. Отображение $\bar{f}: X/R \to X'/R'$, получающееся из f переходом к факторам, является тогда морфизмом.

5.9.7. (*Транзитивность факторов.*) Пусть R и S — такие два отношения эквивалентности на X, что R влечет за собой S, и пусть S/R — факторотношение эквивалентности на X/R. Предположим, что R регулярно. Тогда, для того чтобы S было регулярно, необходимо и достаточно, чтобы таково было S/R; если это так, каноническая биекция

$$(X/R)/(S/R) \to X/S$$

есть изоморфизм многообразий.

5.9.8. (*Произведения факторов.*) Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — конечное семейство многообразий, каждое из которых наделено регулярным отношением эквивалентности R_i. Пусть $X = \prod_{i \in I} X_i$, и пусть R — отношение эквивалентности на X, являющееся произведением отношений R_i (см. *Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 5, n° 3, следствие предложения 8). Тогда R регулярно, и каноническая биекция из X/R на $\prod_{i \in I} (X_i/R_i)$ есть изоморфизм многообразий.

5.10. Субиммерсии

5.10.1. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм многообразий, и пусть Γ — график морфизма f. Отображение $j: x \mapsto (x, f(x))$ есть иммерсия из X в $X \times Y$, образом которой является подмногообразие Γ, и $f = \mathrm{pr}_2 \circ j$ есть композиция *иммерсии* j с последующей *субмерсией* pr_2.

Пусть $a \in X$. Говорят, что f — *субиммерсия в* a, если существуют открытая окрестность U точки a, многообразие Z, субмерсия s из U в Z и иммерсия i из Z в Y, такие, что $f|U = i \circ s$. Множество точек в X, в которых f — субиммерсия, открыто в X; если это открытое множество совпадает со всем X, говорят, что f есть *субиммерсия*.

5.10.2. Иммерсии и субмерсии суть субиммерсии. Если $f: X \to$

$\to Y$ — субиммерсия, $g: Y \to Z$ — иммерсия и $h: W \to X$ — субмерсия, то $g \circ f \circ h$ есть субиммерсия.

Если f и f' — субиммерсии, то $f \times f'$ — субиммерсия.

5.10.3. Для того чтобы $f: X \to Y$ был субиммерсией в точке a из X, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие карта (U, φ, E) на X в a, карта (V, ψ, F) на Y в точке $f(a)$ и непрерывное линейное отображение g из E в F, что

(i) $f(U) \subset V$, $g(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ и $f|U = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$;

(ii) ядро (соотв. образ) отображения g есть замкнутое подпространство в E (соотв. в F), допускающее топологическое дополнение.

5.10.4. Пусть X и Y — два многообразия конечной размерности. Для того чтобы морфизм f из X в Y был субиммерсией в точке a из X, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие система координат $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ на X в a, система координат $(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ на Y в $f(a)$ и целое число $k \leqslant \inf(m, n)$, что

$$\eta^i \circ f = \xi^i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$\eta^i \circ f = 0 \quad \text{для} \quad k < i \leqslant n.$$

5.10.5. Пусть $f: X \to Y$ — субиммерсия. Для всякой точки $b \in Y$ $f^{-1}(b)$ есть подмногообразие в X; подпространство в $T_a(X)$, касательное к подмногообразию $f^{-1}(b)$ в точке $a \in f^{-1}(b)$, есть ядро отображения $T_a(f)$.

5.10.6. (*Теорема о постоянстве ранга.*) Пусть $f: X \to Y$ — морфизм многообразий, и пусть $a \in X$. Если f — субиммерсия в a, то $\mathrm{rg}_x f = \mathrm{rg}_a f$ для любой точки x, близкой к a.

Обратно, предположим, что поле K имеет *характеристику нуль.* Пусть (U, φ, E) — карта на X в a, и пусть (V, ψ, F) — карта на Y в $f(a)$ с $f(U) \subset V$. Положим $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Если существуют такие замкнутое векторное подпространство E_1 в E и замкнутое векторное подпространство F_1 в F, что для всякого $x \in U$ подпространство E_1 (соотв. F_1) есть топологическое дополнение к ядру (соотв. образу) производной $Dg(\varphi(x))$ морфизма g в точке $\varphi(x)$, то f есть субиммерсия в a.

Если K имеет *характеристику нуль* (соотв. $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) и если Y *конечномерно* (соотв. $\mathrm{rg}_a f < +\infty$), то f есть субиммерсия в a тогда и только тогда, когда $\mathrm{rg}_x f = \mathrm{rg}_a f$ для всех x, достаточно близких к a.

Если K имеет *характеристику нуль* (соотв. $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) и Y (соотв. X) *конечномерно,* то множество точек x из X, в которых f есть субиммерсия, открыто и *плотно* в X.

5.10.7. (*Каноническая факторизация субиммерсии.*) Всякая субиммерсия есть композиция субмерсии и иммерсии. Более точно, пусть $f\colon X \to Y$ — субиммерсия и J — многообразие ростков подмногообразий многообразия Y (5.8.12). Пусть x принадлежит X и $y = f(x)$; существуют такие открытые окрестности U точки x, что $f|U$ есть субмерсия из U на подмногообразие Z в Y; элемент $\gamma_y(Z)$ из J зависит только от x, но не от выбора окрестности U, и если обозначить его через $\lambda(x)$, то отображение λ будет субмерсией из X в J; если обозначить через ρ каноническую иммерсию из J в Y, то $f = \rho \circ \lambda$. Если f — иммерсия, то морфизм λ из X в J этален.

Если g (сюръективная иммерсия из X в многообразие Z) и h (морфизм из Z в Y) таковы, что $f = h \circ g$, то существует одна и только одна такая субмерсия μ из Z в J, что $\lambda = \mu \circ g$.

5.11. Расслоенные произведения и обратные образы

5.11.1. Пусть F — банахово пространство, $(E_i)_{i\in I}$ — конечное семейство банаховых пространств и $\mathfrak{f} = (f_i)_{i\in I}$ — семейство непрерывных линейных отображений f_i из E_i в F. Пусть E — произведение пространств E_i и f — непрерывное линейное отображение из E в F^I, являющееся произведением отображений f_i. Пусть, наконец, D — замкнутое подпространство в F^I, образованное такими $(y_i)_{i\in I}$, что y_i не зависит от i («диагональ» в F^I). Говорят, что семейство $\mathfrak{f}$ *трансверсально,* если непрерывное линейное отображение, составленное из f и канонической проекции из F^I на фактор пространство F^I/D, *сюръективно* и если его ядро $f^{-1}(D)$ допускает топологическое дополнение.

Если пространства E_i и F все конечномерны, то семейство $\mathfrak{f}$ трансверсально в том и только том случае, когда

$$\operatorname{codim}\Big(\bigcap_i \operatorname{Im} f_i\Big) = \sum_i \operatorname{codim}(\operatorname{Im} f_i).$$

Если $I = \{1, 2\}$, то пара (f_1, f_2) трансверсальна тогда и только тогда, когда отображение

$$f_1 + f_2\colon E_1 \oplus E_2 \to F$$

сюръективно и его ядро допускает топологическое дополнение (если E_1 и E_2 конечномерны, это сводится к тому, что

$$\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 = F).$$

5.11.2. Пусть S — многообразие, $(X_i)_{i\in I}$ — конечное семейство многообразий и $\mathfrak{f} = (f_i)_{i\in I}$ — семейство морфизмов f_i из X_i в S. Пусть P — подмножество в произведении X многообразий X_i образованное такими точками $(x_i)_{i\in I}$, что $f_i(x_i)$ не зависит от i. Пусть $x \in P$, и пусть $y = f_i(x_i) \in S$. Говорят, что семейство $\mathfrak{f}$ *транс-*

версально в точке x из P, если отображения $T_{x_i}(f_i)$ образуют трансверсальное семейство непрерывных линейных отображений со значениями в банаховом пространстве $T_y(S)$. Говорят, что $\mathbf{f}$ *трансверсально*, если оно трансверсально в каждой точке из P.

Если $\mathbf{f}$ трансверсально, то P есть подмногообразие в X, называемое *расслоенным произведением семейства многообразий* X_i *над* S (по отношению к семейству $\mathbf{f}$), и обозначаемое через $\prod_{i \in I}^{S} X_i$ (или, проще, например, через $X_1 \times_S X_2$, когда $I = \{1, 2\}$). Для всякой точки $x = (x_i)$ из P касательное пространство $T_x(\prod_S X_i)$ есть подпространство в $\prod T_{x_i}(X_i)$, образованное такими касательными векторами $t = (t_i)$, что $T_{x_i}(f_i) \cdot t_i$ не зависит от индекса i.

Если $f_1: X_1 \to Y$ — *субмерсия* и $f_2 : X \to Y$ — морфизм, то пара (f_1, f_2) трансверсальна.

5.11.3. (*Свойство универсальности расслоенных произведений.*) Пусть $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ — трансверсальное семейство морфизмов $f_i : X_i \to S$, и пусть P — расслоенное произведение многообразий X_i над S; для всякого $i \in I$ обозначим через π_i морфизм из P в X_i, полученный ограничением на P проекции многообразия X на X_i; тогда $f_i \circ \pi_i$ есть морфизм из P в S, не зависящий от i. Пусть T — многообразие и $g_i: T \to X_i$ — такие морфизмы многообразий, что $f_i \circ g_i$ есть морфизм из T в S, не зависящий от $i \in I$; тогда существует один и только один такой морфизм h из T в P, что $g_i = \pi_i \circ h$ для каждого $i \in I$.

5.11.4. (*Ассоциативность расслоенного произведения.*) Пусть $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ — конечное семейство морфизмов многообразий, $f_i: X_i \to S$, и пусть $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — разбиение множества I. Предположим, что для каждого λ из Λ семейство $\mathbf{f}_\lambda = (f_i)_{i \in J_\lambda}$ трансверсально, и обозначим через P_λ расслоенное произведение этого семейства; для всякой точки $x = (x_i)_{i \in J_\lambda}$ из P_λ элемент $f_i(x_i)$ в S не зависит от $i \in J_\lambda$ и обозначается через $u_\lambda(x)$; тогда u_λ есть морфизм из P_λ в S. Для того чтобы семейство $\mathbf{u} = (u_\lambda)$ было трансверсально, необходимо и достаточно, чтобы таким было семейство $\mathbf{f}$. Каноническая биекция из $\prod_{\lambda \in \Lambda} \prod_{i \in J_\lambda} X_i$ на $\prod_{i \in I} X_i$ дает тогда при ограничении изоморфизм расслоенного произведения $\prod_{\lambda \in \Lambda}^{S} P_\lambda$ на расслоенное произведение $\prod_{i \in I}^{S} X_i$.

5.11.5. Пусть S — многообразие. *Многообразием над* S называется многообразие X, наделенное морфизмом $\lambda: X \to S$. Пусть (X, λ)—многообразие над S и $f: S' \to S$—такой морфизм многообра-

зий, что пара (f, λ) трансверсальна. Обозначим тогда через $f^* (X)$ многообразие $S' \times_S X$, наделенное морфизмом $f^* (\lambda): S' \times_S X \to S'$, определенным формулой $f^* (\lambda) (s', x) = s'$. Говорят, что $f^* (X)$ получается из X заменой базы S на S', следуя f. Если λ — субмерсия (соотв. иммерсия, субиммерсия, этальный морфизм), таков же и $f^* (\lambda)$.

5.11.6. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм многообразий и W — подмногообразие в Y; пусть i — каноническая инъекция из W в Y. Говорят, что f *трансверсален к* W *в точке* $x \in f^{-1} (W)$, если пара (f, i) трансверсальна в точке $(x, f (x))$ из $X \times W$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) касательное пространство $T_{f(x)} (Y)$ есть сумма пространства $T_{f(x)} (W)$ и образа отображения $T_x (f)$;

(ii) прообраз $T_x (f)^{-1} (T_{f(x)} (W))$ касательного пространства к W в точке $f (x)$ допускает топологическое дополнение.

Говорят, что f *трансверсален к* W, если он трансверсален к W в каждой точке из $f^{-1} (W)$.

Для того чтобы морфизм f из X в Y был субмерсией, достаточно, чтобы он был трансверсален к каждой точке из Y, и необходимо, чтобы он был трансверсален ко всякому подмногообразию многообразия Y. Для того чтобы конечное семейство морфизмов $f_i: X_i \to S$ было трансверсально, необходимо и достаточно, чтобы морфизм g из $\prod_{i \in I} X_i$ в S^I, определенный формулой $g ((x_i)_{i \in I}) = (f_i (x_i))_{i \in I}$, был трансверсален к диагонали в S^I.

5.11.7. Предположим, что морфизм $f: X \to Y$ трансверсален к подмногообразию W многообразия Y. Тогда $f^{-1} (W)$ есть подмногообразие в X, и для точки x из $f^{-1} (W)$ подпространство в $T_x (X)$, касательное к $f^{-1} (W)$, есть прообраз подпространства $T_{f(x)} (W)$ относительно $T_x (f)$. Линейное отображение $T_x (f)$ определяет при переходе к фактору изоморфизм топологических векторных пространств — пространства, трансверсального к $f^{-1} (W)$ в x, на пространство, трансверсальное к W в $y = f (x)$. Если коразмерность подмногообразия W равна d в точке y из Y, то подмногообразие $f^{-1} (W)$ многообразия X имеет коразмерность d во всякой точке из $f^{-1} (W)$. Наконец, отображение $x \mapsto (x, f (x))$ есть изоморфизм многообразий из $f^{-1} (W)$ на расслоенное произведение $X \times_Y W$.

5.11.8. Пусть Y_1 и Y_2 — два подмногообразия многообразия X, и пусть ι_j — инъекция из Y_j в X. Говорят, что Y_1 и Y_2 трансверсальны, если пара (ι_1, ι_2) трансверсальна; к этому же сводится

предположение, что для всякой точки x из $Y_1 \cap Y_2$ суммой подпространств $T_x(Y_1)$ и $T_x(Y_2)$ пространства $T_x(X)$ является $T_x(X)$, а их пересечение допускает топологическое дополнение в $T_x(X)$. При этих условиях $Y_1 \cap Y_2$ есть подмногообразие в X, и для каждого x из $Y_1 \cap Y_2$

$$T_x(Y_1 \cap Y_2) = T_x(Y_1) \cap T_x(Y_2);$$

если, кроме того, Y_i имеет в x коразмерность d_i, то $Y_1 \cap Y_2$ имеет коразмерность $d_1 + d_2$ в x.

5.11.9. Пусть f и g — два морфизма многообразия X в многообразие Y. Если морфизм (f, g): $X \to Y \times Y$ трансверсален к диагонали в $Y \times Y$, то подмножество N в X, образованное такими точками x, что $f(x) = g(x)$, есть подмногообразие в X; оно называется *ядром* двойной стрелки

$$f, g: X \rightrightarrows Y.$$

5.12. Групповые многообразия

5.12.1. Пусть G — группа. Структура многообразия на G называется *согласованной* со структурой группы на G, если отображение $(x, y) \mapsto xy$ из $G \times G$ в G есть морфизм. Отображение $x \mapsto x^{-1}$ есть тогда морфизм группы G в себя. Множество G, наделенное его групповой структурой и его структурой многообразия, называется *групповым многообразием* («класса C^r», если нужно уточнить) или *группой Ли*. Если $r = \omega$, говорят также об *аналитической группе*. Если $K = \mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}_p$), говорят также о *вещественной* (соотв. *комплексной*, *p-адической*) *группе Ли*. Всякое групповое многообразие чистое. *Гомоморфизмом групповых многообразий* (или просто *гомоморфизмом*) называется всякое отображение одного группового многообразия в другое, являющееся одновременно гомоморфизмом групп и *морфизмом* многообразий.

Если G — групповое многообразие, то топологическая структура, лежащая ниже структуры многообразия на G, превращает G в *полную метризуемую топологическую группу*; пространство G локально компактно, если K локально компактно и G конечномерно.

5.12.2. *Примеры*

(i) Если V — банахово пространство, то каноническая структура многообразия на V согласована с его структурой коммутативной группы.

(ii) Пусть A — полная нормированная K-алгебра с единицей, и пусть A^* — группа обратимых элементов из A. Это открытое в A подпространство, и структура многообразия на нем, индуцированная канонической структурой многообразия на векторном K-про-

странстве A, согласована со структурой группы на A^*. В частности, возьмем в качестве A алгебру $\mathscr{L}(E)$ непрерывных эндоморфизмов банахова пространства E (группа A^* состоит из автоморфизмов топологического векторного пространства E) и обозначим через $\mathbf{GL}(E)$ определенное таким способом групповое многообразие. Когда $A = \mathbf{M}_n(K)$, получаем структуру группового многообразия на $\mathbf{GL}(n, K)$.

(iii) Если $G_1, \ldots, G_n$ — групповые многообразия, то произведение групп $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ есть групповое многообразие, коль скоро оно наделено структурой многообразия, являющейся произведением структур на G_i.

5.12.3. Пусть G — групповое многообразие, H — топологическая группа, и пусть $f: H \to G$ — непрерывный гомоморфизм, удовлетворяющий условию (QR) из n° 5.8.1. Структура многообразия на H, являющаяся *обратным образом* относительно f структуры многообразия на G, превращает H в групповое многообразие. Это как раз применимо в случае, когда H есть *подгруппа* в G, *являющаяся подмногообразием* (соотв. квазиподмногообразием); подобная подгруппа называется *групповым подмногообразием* (соотв. квазиподмногообразием) в G; она обязательно *замкнута* в G.

Если H_i ($i = 1, \ldots, n$) — групповое подмногообразие в G_i, то $H_1 \times \ldots \times H_n$ есть групповое подмногообразие в $G_1 \times \ldots \times G_n$.

5.12.4. Пусть G — групповое многообразие, и пусть H — групповое подмногообразие в G. Отношение эквивалентности $x^{-1}y \in H$ регулярно, что позволяет наделить пространство G/H левых классов смежности xH структурой многообразия, называемой *фактор-структурой* структуры многообразия на G. Каноническое отображение $(g, x) \mapsto g \cdot x$ из $G \times (G/H)$ в G/H есть морфизм. Имеем аналогичные результаты для однородного пространства H/G правых классов смежности Hx. Если H — нормальная подгруппа, структура многообразия на множестве G/H согласована с его групповой структурой.

5.12.5. Пусть G — групповое многообразие, и пусть X — многообразие. *Законом левого действия группы G на многообразии X* называется всякий такой морфизм $(s, x) \mapsto sx$ из $G \times X$ в X, что

$$s(tx) = (st)x, \text{ если } s, t \in G, \ x \in X,$$

$$ex = x, \text{ если } x \in X \ (e \text{ — единичный элемент в } G).$$

Говорят также, что групповое многообразие G *действует слева* на X; аналогично определяются законы правого действия.

Пусть $x \in X$, и пусть G_x — стабилизатор точки x в G. Предположим, что отображение $g \mapsto g \cdot x$ есть *субиммерсия* (это предположение автоматически выполнено, если характеристика поля K

равна 0 и X конечномерно). Тогда G_x есть групповое подмногообразие в G, и отображение из G/G_x в X, полученное из $g \mapsto g.x$ переходом к фактору, есть иммерсия. Если к тому же орбита $G.x$ точки x локально замкнута и если топология в G допускает счетный базис, то $G.x$ есть подмногообразие в X и отображение $G/G_x \to G.x$ есть изоморфизм многообразий.

5.13. Ослабление структуры

Во всем этом пункте буквы r, s, r', s' обозначают либо целые числа $\geqslant 1$, либо один из символов ∞ и ω. Предполагается, что $K = \mathbf{R}$.

5.13.1. Пусть $r \leqslant s$ и X — многообразие класса C^s. На топологическом пространстве X существует одна и только одна такая структура многообразия класса C^r, что всякая карта на X относительно данной структуры есть карта на X относительно этой новой структуры. Пусть X_r — полученное таким способом многообразие класса C^r. Говорят, что оно получено из X *ослаблением* структуры многообразия на X или что его структура многообразия *лежит ниже* структуры многообразия на X. Понятие ослабления транзитивно: если $r' \leqslant r$, то $X_{r'} = (X_r)_{r'}$; оно перестановочно с произведениями: если Y принадлежит классу C^s, то $(X \times Y)_r = X_r \times Y_r$; аналогичный результат имеет место для $X \times_S Y$ в предположениях, указанных в n° 5.11.2.

Пусть $a \in X$, и пусть c — карта на X в a, это также карта на X_r в a. Отсюда получаем (5.5.1) изоморфизмы

$$\theta_c : E \to T_a(X), \quad \theta_c' : E \to T_a(X_r),$$

откуда следует изоморфизм $\theta_c' \circ \theta_c^{-1} : T_a(X) \to T_a(X_r)$. Этот изоморфизм не зависит от выбора c; он позволяет *отождествить касательные пространства* в a к X и к X_r.

5.13.2. Пусть X (соотв. X') — многообразие класса C^s (соотв. $C^{s'}$), и пусть r таково, что $r \leqslant \inf(s, s')$. Говорят, что отображение $f : X \to X'$ принадлежит *классу* C^r, если оно есть морфизм из X_r в X'_r; такое отображение принадлежит классу $C^{r'}$ для всякого $r' \leqslant r$. Более того, касательное линейное отображение к $f : X_r \to X'_r$ в точке $a \in X$ совпадает с касательным линейным отображением к отображению f, рассматриваемому как морфизм из $X_{r'}$ в $X'_{r'}$.

Как правило, X и X_r будут обозначаться одним символом; так, если X принадлежит классу C^s, выражение «подмногообразие в X класса C^r» ($r \leqslant s$) означает «подмногообразие в X_r».

5.14. Сужение основного поля

В этом пункте мы задаемся двумя коммутативными полными нормированными недискретными полями K и L, а также *изоморфизмом* σ нормированного поля K на подполе в L. Если E — банахово пространство над L, через $\sigma_*(E)$ обозначается векторное пространство над K, полученное сужением поля скаляров (см. *Alg.*, chap. II, 3[e] éd., § 8[1])); данная топология на E согласована со структурой векторного K-пространства, и $\sigma_*(E)$ есть банахово пространство над K.

5.14.1. Пусть X — *аналитическое многообразие над* L, и пусть $c = (U, \varphi, E)$ — карта на X. Отображение φ есть биекция из U на открытое подмножество в $\sigma_*(E)$, и тройка $c_\sigma = (U, \varphi, \sigma_*(E))$ есть карта на X. На X существует одна и только одна структура аналитического многообразия над K, относительно которой c_σ является картой для любой карты c L-аналитического многообразия X. Полученное таким способом аналитическое многообразие над K обозначается через X_σ, и говорят, что X_σ получается из X *сужением поля скаляров* (с L до K при помощи σ). Топологическое пространство, лежащее ниже многообразия X_σ, то же, что и лежащее ниже многообразия X.

5.14.2. *Примеры*

(a) Берем $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$, и σ — каноническая инъекция из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{C}$. Тем самым *всякое комплексно-аналитическое многообразие канонически наделяется структурой вещественно-аналитического многообразия;* эта вещественно-аналитическая структура сама определяет дифференцируемые структуры класса C^r для всякого r.

(b) Берем $K = \mathbf{C}$, $L = \mathbf{C}$, σ — сопряжение $x \mapsto \bar{x}$. Тем самым со всяким комплексно-аналитическим многообразием X связывается комплексно-аналитическое многообразие $\bar{X}$, называемое *сопряженным* к X. Если f — комплекснозначная функция, определенная на открытом в X подмножестве U, то f аналитична относительно структуры многообразия $\bar{X}$ тогда и только тогда, когда сопряженная функция $\bar{f}$ аналитична относительно структуры многообразия X. Многообразия X и $\bar{X}$ определяют при сужении поля скаляров одно и то же вещественно-аналитическое многообразие.

5.14.3. Пусть X — аналитическое многообразие над K, Y — аналитическое многообразие над L. Отображение $f: X \to Y$ называется σ-аналитическим, если оно является морфизмом из X в Y_σ. Если $K \subset L$, причем σ есть инъекция из K в L, и X — аналитическое многообразие над L, то K-аналитическим отображением называется σ-аналитическое отображение из X_σ в Y.

[1]) См. также *Алг.*, гл. II, § 5.— *Прим. перев.*

5.14.4. Пусть V — банахово L-пространство. Тогда $V_\sigma = \sigma_*(V)$: каноническая структура аналитического многообразия над K на $\sigma_*(V)$ получается из канонической структуры аналитического многообразия над L на V сужением поля скаляров.

5.14.5. Пусть X — аналитическое многообразие над L, и пусть $a \in X$. Пусть c — карта на X в a; тогда c_σ есть карта на X_σ в a, что влечет за собой изоморфизмы

$$\theta_c : E \to T_a(X), \quad \theta_{c_\sigma} : \sigma_*(E) \to T_a(X_\sigma),$$

откуда получаем изоморфизмы $\theta_{c_\sigma} \circ \sigma_*(\theta_c)^{-1}$ из $\sigma_*(T_a(X))$ на $T_a(X_\sigma)$; этот изоморфизм не зависит от выбора c; он позволяет отождествить $T_a(X_\sigma)$ с $\sigma_*(T_a(X))$ и даже, если допустить вольность в записи, с $T_a(X)$.

Если f есть L-аналитическое отображение многообразия X в некоторое многообразие Y, то касательное линейное отображение к f в a (f рассматривается при этом как морфизм из X_σ в Y_σ) равно $\sigma_*(T_a(f))$.

5.14.6. Пусть X и Y — два *аналитических* многообразия над L и $f: X_\sigma \to Y$ есть σ-аналитическое отображение. Предположим, что характеристика поля K равна 0. Тогда для того, чтобы f было аналитично над L, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $a \in X$ отображение $T_a(f)$ было L-линейно.

Когда $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$ (случай (a) в n° 5.14.2), имеем более точный результат: если X и Y конечномерны и если $f: X \to Y$ есть отображение класса C^1, касательное отображение к которому в каждой точке $a \in X$ $\mathbf{C}$-линейно, то f комплексно-аналитично.

5.14.7. Пусть X — *комплексно-аналитическое* многообразие и g — отображение из X в себя, удовлетворяющее условиям

(i) $g \circ g = \mathrm{Id}_X$.

(ii) Отображение g есть изоморфизм аналитического многообразия X на сопряженное многообразие $\overline{X}$ (5.14.2).

Множество X_0 таких точек $x \in X$, что $g(x) = x$, есть замкнутое аналитическое подмногообразие вещественно-аналитического многообразия, лежащего ниже X. Для $x \in X_0$ имеем $T_x(X) = T_x(X_0) \oplus iT_x(X_0)$.

Пусть U — *связное* открытое подмножество в X, и пусть f и g — два комплексно-аналитических отображения из U в отделимое локально выпуклое комплексное пространство или в отделимое комплексно-аналитическое многообразие. Если f и g совпадают на непустом подмножестве в $U \cap X_0$, открытом в X_0, то $f = g$.

Предположим, что X_0 паракомпактно. Если f — вещественно-аналитическое отображение из X_0 в отделимое локально выпуклое

пространство или в отделимое комплексно-аналитическое многообразие, то существуют открытая окрестность U множества X_0 в X и комплексно-аналитическое отображение из U в пространство значений отображения f, продолжающее f. Два таких продолжения совпадают в некоторой окрестности множества X_0 в X.

Предположим, что X конечномерно. Для всякой точки $a \in X_0$ существует такая система (комплексных) координат $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ в открытой окрестности U точки a, что $\zeta^i \circ g = \bar{\zeta}^i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$; ограничение ξ^i координаты ζ^i на $U \cap X_0$ принимает тогда вещественные значения, и $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ есть система координат в точке a на вещественно-аналитическом многообразии X_0.

5.14.8. Для всякого *паракомпактного* вещественно-аналитического многообразия Y существуют пара (X, g), состоящая из комплексно-аналитического многообразия X и отображения из X в себя, удовлетворяющего условиям (i) и (ii) из 5.14.7, и изоморфизм f из Y на X_0. Говорят, что X (наделенное отображениями f и g) есть *комплексификация* многообразия Y.

§ 6. Расслоения [1]

6.1. Расслоения

6.1.1. *Расслоением класса C^r*, или просто расслоением, называется тройка (X, B, π), где B и X суть многообразия класса C^r и π — морфизм из X в B, обладающий следующим свойством:

(F) Для всякого $x \in B$ существуют открытая окрестность U точки x, многообразие F и такой изоморфизм φ из $\pi^{-1}(U)$ на $U \times F$, что $\pi(\varphi^{-1}(x, y)) = x$ для всякого $x \in U$ и всякого $y \in F$.

Если $\lambda = (X, B, \pi)$ — расслоение, то X называется *пространством* расслоения λ, B — *базой* расслоения λ и π — *проекцией* расслоения λ. Отображение π есть *субмерсия;* в частности, $\pi(X)$ открыто в B, и если R означает отношение эквивалентности в X, определенное проекцией π, то каноническое отображение из X/R в $\pi(X)$ есть изоморфизм. Для всякого $x \in B$ прообраз $\pi^{-1}(x)$ есть замкнутое подмногообразие в X, называемое *слоем* в точке x и обозначаемое через X_x.

6.1.2. *Примеры*

(a) Если B и F — два многообразия, тройка $(B \times F, B, \mathrm{pr}_1)$ есть расслоение, слои которого канонически изоморфны F.

(b) Если $\lambda = (X, B, \pi)$ и $\lambda' = (X', B', \pi')$ — расслоения, то

$$\lambda \times \lambda' = (X \times X', B \times B', \pi \times \pi')$$

есть расслоение; оно называется *произведением* расслоений λ и λ'.

(c) Если $\lambda = (X, B, \pi)$ и $\lambda' = (X', B', \pi')$ — расслоения *с одной и той же базой*, то $\lambda \times_B \lambda' = (X \times_B X', B, \pi \times_B \pi')$ есть

---

[1] Определения и большая часть результатов § 6 и 7 приложимы также к категории *топологических пространств;* нужно тогда заменить слова «многообразия», «подмногообразия», «морфизмы» и «групповые многообразия» на «топологические пространства», «топологические подпространства», «непрерывные отображения» и «топологические группы». Исключение составляют результаты, относящиеся к иммерсиям, субмерсиям и регулярным отношениям эквивалентности, равно как и результаты из n°n° 6.2.3 и 6.2.4 (a).

Условимся также называть *многообразием класса* C^0 (или *топологическим многообразием)* всякое топологическое пространство X со следующим свойством: для всякой точки $x \in X$ существует ее открытая окрестность, гомеоморфная открытому подмножеству вещественного банахова пространства; термин «морфизм класса C^0» используется как синоним термина «непрерывное отображение»; аналогичные соглашения принимаются для сечений, расслоений, векторных расслоений и т. д.

расслоение; оно называется *произведением расслоений* λ *и* λ' *над* B или также *расслоенным произведением* расслоений λ и λ'.

6.1.3. Пусть $\lambda = (X, B, \pi)$ и $\lambda' = (X', B', \pi')$ — два расслоения. *Морфизмом* из λ в λ' называется всякая пара (f, g), где f — морфизм из B в B' и g — такой морфизм из X в X', что $\pi' \circ g = f \circ \pi$. Когда $B = B'$ и $f = \mathrm{Id}_B$, говорят, что g есть *B-морфизм* расслоения λ в λ'; если g — изоморфизм из X на X', то g^{-1} есть B-морфизм из λ' в λ, и говорят, что g есть *B-изоморфизм* из λ на λ'; для этого необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in B$ отображение $g_x\colon X_x \to X'_x$, индуцированное морфизмом g, было изоморфизмом.

6.1.4. Расслоение $(B \times F, B, \mathrm{pr}_1)$ называется *тривиальным* расслоением с базой B и со слоем F. Изоморфизм расслоения λ на тривиальное расслоение называется *тривиализацией* расслоения λ.

6.1.5. Пусть $\lambda = (X, B, \pi)$ — расслоение и $f\colon B' \to B$ — морфизм. Пусть π' — канонический морфизм из $B' \times_B X$ в B'. Тройка $(B' \times_B X, B', \pi')$ есть расслоение, называемое *обратным образом расслоения* λ *относительно* f, или расслоением, полученным из λ заменой базы B на B', следуя f, и обозначается через $B' \times_B \lambda$, или через $f^*\lambda$. Если f' означает каноническое отображение из $B' \times \times_B X$ в X, то пара (f, f') есть *морфизм* из $B' \times_B \lambda$ в λ; он обладает следующим свойством универсальности: если (f, g) — морфизм расслоения λ' с базой B' в расслоение λ, то существует один и только один такой B'-морфизм $\varphi\colon \lambda' \to B' \times_B \lambda$, что $(f, g) = (f, f') \circ \varphi$.

Когда B' — подмногообразие в B и f — каноническая инъекция из B' в B, то $B' \times_B X$ отождествляется с подмногообразием $\pi^{-1}(B')$ в X и π' — с ограничением проекции π на $\pi^{-1}(B')$; обратный образ расслоения λ относительно f называется тогда *расслоением над* B', *индуцированным расслоением* λ.

6.1.6. Если $\lambda = (X, B, \pi)$ — расслоение, *морфическим сечением* (или просто *сечением*) расслоения λ называется всякий морфизм $s\colon B \to X$, такой, что $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$. (В дальнейшем эта терминология обобщается, и слову «сечение» придается более широкий смысл: см. начало § 8.)

6.2. Главные расслоения

6.2.1. Пусть B — многообразие и G — групповое многообразие. *Главным расслоением с базой* B *и структурной группой* G называется четверка $\lambda = (P, G, B, \pi)$, где P — многообразие, на котором G действует справа по закону $(x, g) \mapsto x \, . \, g$ (см. n° 5.12.5), и где π — морфизм из P в B, причем выполняется следующая аксиома:

(P) Для всякого $b \in B$ существуют такие открытая окрестность U точки b и изоморфизм $f: U \times G \to \pi^{-1}(U)$, что
$\pi(f(u, g)) = u$ и $f(u, gg') = f(u, g) . g'$, если $u \in U$ и $g, g' \in G$.

6.2.2. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение. Тройка (P, B, π) есть расслоение; имеем $\pi(P) = B$. Отношение эквивалентности R в P, задаваемое проекцией π, совпадает с тем, которое определено действием группы G; его график есть не что иное, как произведение $P \times_B P$ (см. n° 5.11.2), это подмногообразие в $P \times P$. Отображение $(x, g) \mapsto (x, x . g)$ есть изоморфизм из $P \times G$ на $P \times_B P$; отображение, сопоставляющее каждому $(x, y) \in P \times_B P$ единственный элемент $g \in G$, такой, что $y = x . g$, есть морфизм из $P \times_B P$ в G.

Группа G действует на P *собственно и свободно* (см. *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4). Если $x \in P$ и если $b = \pi(x)$, то отображение $g \mapsto x . g$ есть *изоморфизм многообразия G на слой в точке b.*

6.2.3. Обратно, пусть G — групповое многообразие и P — многообразие, на котором G действует справа так, что выполняются следующие условия:

(a) *G действует на P собственно и свободно.*

(b) *Для всякого $x \in P$ отображение $g \mapsto x . g$ есть иммерсия из G в P.*

Тогда отношение эквивалентности в P, определенное группой G, регулярно; если обозначить через P/G фактормногообразие и через π — каноническую проекцию из P на P/G, то четверка $(P, G, P/G, \pi)$ есть главное расслоение.

Когда K имеет характеристику 0 и P конечномерно, приведенное выше условие (b) есть следствие условия (a).

6.2.4. Условия предыдущего пункта выполнены в двух следующих случаях:

(a) *P — групповое многообразие* и *G — групповое подмногообразие,* действующее на P правыми сдвигами; базой полученного таким способом главного расслоения служит однородное пространство P/G.

(b) *G — дискретная* группа, действующая на P *собственно и свободно*. Проекция $\pi: P \to P/G$ есть тогда этальный морфизм (n° 5.7.6).

6.2.5. *Примеры*

(a) Пусть B — многообразие, и пусть G — групповое многообразие. Заставим G действовать на $B \times G$ по закону $(b, g) . g' = (b, gg')$. Четверка $(B \times G, G, B, \mathrm{pr}_1)$ есть главное расслоение.

(b) Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и $\lambda' = (P', G', B', \pi')$ — два главных расслоения. Заставим $G \times G'$ действовать на $P \times P'$ по формуле

$$(x, x') . (g, g') = (x . g, x' . g'),\quad x \in P,\ x' \in P',\ g \in G,\ g' \in G'.$$

Четверка $\lambda \times \lambda' = (P \times P', G \times G', B \times B', \pi \times \pi')$ есть главное расслоение; оно называется *произведением* расслоений λ и λ'.

(c) Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и $\lambda' = (P', G', B, \pi')$ — два главных расслоения с одной базой. Подмногообразие $P \times_B P'$ в $P \times P'$ инвариантно относительно действия группы $G \times G'$, и четверка

$$\lambda \times_B \lambda' = (P \times_B P', G \times G', B, \pi \times_B \pi')$$

есть главное расслоение; оно называется *произведением расслоений λ и λ' над B* или *расслоенным произведением* расслоений λ и λ'.

6.3. Морфизмы главных расслоений

6.3.1. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и $\lambda' = (P', G', B', \pi')$ — два главных расслоения. *Морфизмом* из λ в λ' называется всякая тройка (f, φ, h), где f: $P \to P'$ и h: $B \to B'$ — морфизмы, φ: $G \to G'$ — гомоморфизм групповых многообразий и где $\pi' \circ f = h \circ \pi$ и $f(x \,.\, g) = f(x) \,.\, \varphi(g)$ для $x \in P$, $g \in G$. Отметим, что f определяет h; часто будем говорить, что (f, φ), или даже просто f, есть морфизм.

Когда $B = B'$ и $h = \mathrm{Id}_B$ (соотв. когда $G = G'$ и $\varphi = \mathrm{Id}_G$), такой морфизм называется *B-морфизмом,* согласованным с φ (соотв. *G-морфизмом,* согласованным с h). Морфизм, являющийся одновременно B-морфизмом и G-морфизмом, называется *G-B-морфизмом* (в этом случае также говорят просто о «морфизме», если не может быть путаницы). Всякий G-B-морфизм f: $P \to P'$ есть изоморфизм многообразия P на многообразие P', обратный изоморфизм f^{-1} есть G-B-морфизм: f есть *G-B-изоморфизм из P на P'.*

Два главных расслоения P и P' с одной базой B и одной структурной группой G называются *G-B-изоморфными* (или просто *изоморфными*), если существует G-B-изоморфизм из P на P'.

6.3.2. Главное расслоение $(B \times G, G, \mathrm{pr}_1)$ называется *тривиальным* главным расслоением с базой B и структурной группой G. Изоморфизм главного расслоения $\lambda\,(P, G, B, \pi)$ на тривиальное главное расслоение с базой B и структурной группой G называется *тривиализацией* расслоения λ. Всякое сечение s расслоения λ определяет тривиализацию f_s расслоения λ по формуле

$$f_s^{-1}(b, g) = s(b) \,.\, g \text{ для } b \in B \text{ и } g \in G.$$

Получаем таким способом *биекцию множества сечений расслоения λ на множество тривиализаций расслоения λ.* Более того, если s_0 — сечение расслоения λ, всякое сечение s расслоения λ единственным образом записывается в виде $s(b) = s_0(b) \,.\, r(b)$, где r: $B \to G$ есть морфизм.

6.3.3. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение, и пусть h: $B' \to B$ — морфизм. Пусть π' (соотв. h') — канонический морфизм

из $B' \times_B P$ в B' (соотв. в P). Заставим G действовать на $B' \times_B P$ по формуле

$$(b', x) . g = (b', x . g), \ (b', x) \in B' \times_B P, \ g \in G.$$

Четверка $(B' \times_B P, G, B', \pi')$ есть главное расслоение, называемое *обратным образом* расслоения λ относительно h и обозначаемое через $B' \times_B \lambda$ или через $h^*\lambda$. Отображение $h'\colon B' \times_B P \to P$ есть G-*морфизм*, согласованный с h; он обладает следующим свойством универсальности: если f — согласованный с h G-морфизм главного расслоения λ' с базой B' в расслоение λ, существует один и только один такой G-B'-изоморфизм $k\colon \lambda' \to B' \times_B \lambda$, что $f = h' \circ k$.

Когда B' — подмногообразие в B и h — каноническая инъекция из B' в B, $B' \times_B P$ отождествляется с подмногообразием $\pi^{-1}(B')$ в P; оно называется *главным расслоением над* B', *индуцированным расслоением* P, и обозначается через $\pi^{-1}(B')$ или $P \mid B'$. Всякая точка $x \in B$ обладает такой открытой окрестностью U, что $P \mid U$ тривиально.

6.4. Построение главных расслоений с помощью коциклов

Пусть B — многообразие, G — групповое многообразие и $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие многообразия B.

6.4.1. *Коциклом* класса C^r на B со значениями в G, подчиненным покрытию $\mathcal{U}$, называется семейство $(g_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$, обладающее двумя следующими свойствами:

(1) для всякой пары $(i, j) \in I \times I$ $g_{i,j}$ есть отображение класса C^r из открытого в B подмножества $U_i \cap U_j$ в G;

(2) для всякой тройки $(i, j, k) \in I^3$ имеем

$$g_{i,k}(x) = g_{i,j}(x) . g_{j,k}(x) \text{ для всякого } x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Говорят, что два таких коцикла $(g_{i,j})$ и $(g'_{i,j})$ *когомологичны*, если существует семейство $(h_i)_{i \in I}$, в котором h_i для всякого $i \in I$ есть отображение класса C^r из U_i в G, такое, что

$$(3) \qquad g'_{i,j}(x) = h_i(x)^{-1} . g_{i,j}(x) . h_j(x) \text{ для всякого } x \in U_i \cap U_j.$$

6.4.2. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение. Зададимся для каждого $i \in I$ *сечением* s_i расслоения λ над U_i (6.3.3). Для всякой пары $(i, j) \in I^2$ существует тогда один и только один такой морфизм $g_{i,j}$ из $U_i \cap U_j$ в G, что

$$(4) \qquad s_j(b) = s_i(b) . g_{i,j}(b) \text{ для всякого } b \in U_i \cap U_j.$$

Семейство отображений $(g_{i,j})$ есть коцикл на B со значениями в G, подчиненный открытому покрытию $\mathcal{U}$. Говорят, что этот коцикл ассоциирован с объектом $(\lambda, \mathcal{U}, (s_i)_{i\in I})$, и отображения $g_{i,j}$ называются *переходными функциями* для этого объекта.

Для $i \in I$ пусть $x \mapsto (\pi(x), f_i(x))$ — тривиализация, определяемая сечением s_i расслоения $\lambda|U_i$ (6.3.2). Для $x \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$

(5) $$f_i(x) = g_{i,j}(\pi(x)) \,.\, f_j(x).$$

6.4.3. Обратно, пусть $g = (g_{i,j})$ — коцикл на B со значениями в G, подчиненный покрытию $\mathcal{U}$. Существуют тогда главное расслоение $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и семейство сечений $(s_i)_{i\in I}$ расслоения λ над U_i, такое, что выполняется соотношение (4). Выполняется тогда и (5). Если, кроме того, $(\lambda', (s'_i))$ удовлетворяет тем же условиям, существует один и только один такой G-B-изоморфизм f из λ на λ', что $s'_i = f \circ s_i$ для всякого $i \in I$. Этот результат выражается словами: *с точностью до однозначно определенного изоморфизма $(\lambda, (s_i))$ определено коциклом g.*

6.4.4. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и $\lambda' = (P', G, B, \pi')$ — два главных расслоения. Пусть (s_i) (соотв. (s'_i)) — семейство сечений расслоения λ (соотв. λ') над множествами U_i, и пусть g (соотв. g') — коцикл, ассоциированный с $(\lambda, \mathcal{U}, (s_i))$ (соотв. с $(\lambda', \mathcal{U}, (s'_i))$). *Для того чтобы расслоения λ и λ' были G-B-изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы коциклы g и g' были когомологичны.* Точнее, для всякого G-B-изоморфизма f расслоения λ на λ' существует одно и только одно такое семейство $(h_i)_{i\in I}$ морфизмов множеств U_i в G, что выполняется соотношение (3) и что $f \circ (s'_i(x)) = s_i(x) \,.\, h_i(x)$ для всякого $i \in I$ и всякого $x \in U_i$; таким способом получается *биекция* множества G-B-изоморфизмов из λ на λ' на множество семейств $(h_i)_{i\in I}$, удовлетворяющих условию (3).

6.4.5. Вернемся к обозначениям из 6.4.2, и пусть $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие, более тонкое, чем открытое покрытие $\mathcal{U}$. Пусть $\tau\colon A \to I$ — такое отображение, что $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ для всякого $\alpha \in A$. Пусть s'_α — ограничение на V_α сечения $s_{\tau(\alpha)}$ и $g' = (g'_{\alpha,\beta})$ — коцикл, подчиненный открытому покрытию $\mathcal{V}$, ассоциированный с $(\lambda, \mathcal{V}, (s'_\alpha))$. Переходная функция $g'_{\alpha,\beta}$ есть тогда ограничение на $V_\alpha \cap V_\beta$ переходной функции $g_{\tau(\alpha),\tau(\beta)}$.

6.5. Расслоенные пространства, ассоциированные с главным расслоением.

6.5.1. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение. Пусть F — многообразие, на котором группа G действует слева; через $(g, y) \mapsto g\,.\,y$ обозначается закон действия группы G на F. Группа G

действует справа на $P \times F$ по формуле $(x, f) . g = (x . g, g^{-1} . f)$; отношение эквивалентности в $P \times F$, определенное группой G, регулярно; фактор $P \times^G F = (P \times F)/G$ наделен структурой многообразия.

Пусть E — многообразие. Говорят, что E наделено структурой *расслоенного пространства, ассоциированного с* λ, *со слоем типа* F, если задан морфизм ρ: $P \times F \to E$, обладающий следующим свойством:

(As) При $x \in P$, $f \in F$, $g \in G$ выполняется равенство $\rho(x . g, g^{-1} f) = \rho(x, f)$, и отображение $\bar{\rho}$: $P \times^G F \to E$, полученное из ρ переходом к фактору, есть изоморфизм многообразий.

То же самое можно выразить, сказав, что $(P \times F, G, E, \rho)$ есть главное расслоение. Отображение ρ (или иногда отображение $\bar{\rho}$) называется *реперным отображением* для E и обозначается через $(x, f) \mapsto x . f$; имеем

$$(x . g) . f = x . (g . f) \text{ для } x \in P,\ g \in G \text{ и } f \in F.$$

Задание λ и F определяет E с точностью до единственного изоморфизма; в частности, можно взять в качестве E само многообразие $P \times^G F$; говорят, что это *расслоенное пространство, ассоциированное с* λ, *со слоем типа* F, и оно обозначается через $\lambda(F)$.

6.5.2. Пусть E — расслоенное пространство, ассоциированное с λ, со слоем типа F. Существует единственный морфизм π_E из E в B, такой, что $\pi_E(x . f) = \pi(x)$, если $x \in P$, $f \in F$; тройка (E, B, π_E) есть расслоение; если B и F отделимы, то E отделимо.

Пусть $b \in B$ и $F_b = \pi_E^{-1}(b)$; это замкнутое подмногообразие в E. Если $x \in P$ таков, что $\pi(x) = b$, то пусть θ_x: $F \to F_b$ — отображение, определенное формулой $\theta_x(f) = x . f$; это изоморфизм многообразий. Более того, для всякого $g \in G$ имеем $\theta_{x.g} = \theta_x \circ \rho_g$, где ρ_g означает автоморфизм $f \mapsto g . f$ многообразия F. Предположим, что F наделено структурой s какого-либо рода Σ (см. *Теор. множ.*, гл. IV, § 1, n° 4), и предположим, что s *инвариантна* относительно G; тогда на F_b существует одна и только одна такая структура s_b рода Σ, что отображения θ_x: $F \to F_b$ суть изоморфизмы; она получается путем переноса s при помощи одного из θ_x (*loc. cit.*, n° 5).

Если s — сечение расслоения P над открытым в B подмножеством U, то отображение $(b, f) \mapsto s(b) . f$ есть изоморфизм из $U \times F$ на $\pi_E^{-1}(U)$.

6.5.3. *Примеры*

(a) Пусть $\lambda = (B \times G, B, \mathrm{pr}_1)$, $E = B \times F$, и пусть

$$\rho: (B \times G) \times F \to E$$

— отображение $(b, g, f) \mapsto (b, g \,.\, f)$. Получаем, таким образом, на $B \times F$ структуру расслоенного пространства, ассоциированного с λ, со слоем типа F, которая называется *тривиальной*.

(b) Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и $\lambda' = (P', G', B', \pi')$ —два главных расслоения. Пусть F (соотв. F') — многообразие, на котором G (соотв. G') действует слева, и E (соотв. E') — расслоенное пространство, ассоциированное с λ (соотв. с λ'), со слоем типа F (соотв. F'). Группа $G \times G'$ действует на $F \times F'$ по формуле $(g, g') \,.\, (f, f') = (g \,.\, f, g' \,.\, f')$. Отображение $(P \times P') \times (F \times F') \to E \times E'$, являющееся произведением реперных отображений $P \times F \to E$ и $P' \times F' \to E'$, наделяет $E \times E'$ структурой *расслоенного пространства, ассоциированного с* $\lambda \times \lambda'$, *со слоем типа* $F \times F'$.

(c) В обозначениях из (b) и в предположении, что $B' = B$, аналогично определяем на $E \times_B E'$ структуру *расслоенного пространства, ассоциированного с* $\lambda \times_B \lambda'$, *со слоем типа* $F \times F'$.

6.5.4. В обозначениях n° 6.5.1 пусть $h\colon B' \to B$ — морфизм, $\lambda' = B' \times_B \lambda$ и $E' = B' \times_B E$. Если $P' = B' \times_B P$, определим отображение $P' \times F \to E'$, положив $(b', x) \,.\, f = (b', x \,.\, f)$; мы, таким образом, наделим E' структурой *расслоенного пространства, ассоциированного с* λ', *со слоем типа* F; она называется обратным образом данной структуры на E относительно h.

6.5.5. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение и E (соотв. E') — расслоенное пространство, ассоциированное с λ, со слоем типа F (соотв. F'). Пусть $u\colon F \to F'$ — морфизм, согласованный с действием группы G (т. е. такой, что $u(g \,.\, f) = g \,.\, u(f)$ для $f \in F$, $g \in G$). Существует тогда один и только один такой морфизм $\bar{u}\colon E \to E'$, что $\bar{u}(x \,.\, f) = x \,.\, u(f)$ для $x \in P$, $f \in F$. Если u — иммерсия (соотв. субмерсия, субиммерсия), таков же и морфизм $\bar{u}$.

В частности, предположим, что групповое многообразие H действует справа на F так, что $g \,.\, (f \,.\, h) = (g \,.\, f) \,.\, h$ для $g \in G$, $f \in F$, $h \in H$. Всякий элемент $h \in H$ определяет тогда автоморфизм u_h многообразия F, согласованный с действием группы G, а тем самым автоморфизм $\bar{u}_h$ расслоенного пространства E; группа H действует справа на E по формуле $(y, h) \mapsto \bar{u}_h(y)$.

6.5.6. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение, и пусть E — расслоенное пространство, ассоциированное с λ, со слоем типа F. Пусть $s\colon B \to E$ — сечение расслоения E. Для всякого $x \in P$ существует единственный элемент $\sigma(x) \in F$, такой, что $s(\pi(x)) = x \,.\, \sigma(x)$. Определенное таким путем отображение $\sigma\colon P \to F$ является морфизмом многообразий и удовлетворяет тождеству

$$\sigma(x \,.\, g) = g^{-1} \,.\, \sigma(x). \tag{*}$$

Отображение $s \mapsto \sigma$ есть биекция множества сечений расслоения E на множество морфизмов из P в F, удовлетворяющих тождеству (*).

6.5.7. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ и $\lambda' = (P', G, B, \pi')$ — два главных расслоения с одной базой B и одной структурной группой G. Структурной группой главного расслоения $\lambda \times_B \lambda' = (P \times_B P', G \times G, B, (\pi, \pi')_B)$ будет $G \times G$. Заставим $G \times G$ действовать слева на G по формуле

$$(g, g') \cdot g_1 = g \cdot g_1 \cdot g'^{-1},$$

и пусть E — расслоенное пространство, ассоциированное с $\lambda \times_B \lambda'$, со слоем типа G (наделенным законом действия, определенным выше). Тогда *сечения* расслоения E биективно соответствуют *изоморфизмам из P на P'*. Более точно, если s — сечение расслоения E, отвечающее (см. n° 6.5.6) морфизму σ: $P \times_B P' \to G$, то существует один и только один такой G-B-изоморфизм f_s: $P \to P'$, что $\sigma(x, f_s(x)) = e$ для всякого $x \in P$; отображение $s \mapsto f_s$ есть биекция множества сечений расслоения E на множество G-B-изоморфизмов из P на P'.

6.6. Расширение и сужение структурной группы

6.6.1. Пусть $\lambda = (P, G, B, \pi)$ — главное расслоение и φ — гомоморфизм из G в групповое многообразие H. Заставим G действовать слева на H по формуле $g \cdot h = \varphi(g) \cdot h$, и пусть $P \times^G H$ —расслоенное пространство, ассоциированное с λ, со слоем типа H. Поскольку правые сдвиги в H согласованы с действием группы G, группа H действует справа на $P \times^G H$ (см. n° 6.5.5); если π_H означает проекцию из $P \times^G H$ на B, четверка $(P \times^G H, H, B, \pi_H)$ есть главное расслоение, обозначаемое через $\varphi(\lambda)$; говорят, что оно *получается из λ при помощи гомоморфизма φ*.

Отображение f из P в $P \times^G H$, сопоставляющее элементу $x \in P$ класс элемента (x, e), есть *B-морфизм из P в $P \times^G H$, согласованный с φ* (см. n° 6.3.1). Более того, если f' есть B-морфизм из P в главное расслоенное пространство P' со структурной группой H и если f' согласован с φ, то существует единственный такой H-B-изоморфизм θ из $P \times^G H$ на P', что $f' = \theta \circ f$.

6.6.2. Предположим, что λ определено с помощью открытого покрытия $\mathscr{V} = (U_i)$ многообразия B и коцикла (g_{ij}) (6.4.2). Тогда $\varphi(\lambda)$ может быть определено при помощи того же покрытия и коцикла (h_{ij}), где $h_{ij} = \varphi \circ g_{ij}$.

6.6.3. Пусть F — многообразие, на котором группа H действует слева; через $(h, y) \mapsto h \cdot y$ обозначается закон действия группы H

на F. Группа G действует на F по формуле $(g, y) = \varphi(g) \cdot y$. Пусть E — расслоенное пространство, ассоциированное с $\varphi(\lambda)$, со слоем типа F. Отображение $(x, y) \mapsto f(x) \cdot y$ из $P \times F$ в E (где отображение f определено в n° 6.6.1) наделяет E структурой расслоенного пространства, ассоциированного с λ, со слоем типа F. В частности, $(P \times^G H) \times^H F$ *отождествляется с* $P \times^G F$.

6.6.4. Предположим, что G — групповое подмногообразие в H и что $\varphi: G \to H$ — каноническая инъекция из G в H. Говорят тогда, что $\varphi(\lambda)$ получается из λ *расширением структурной группы до* H. Морфизм $f: P \to P \times^G H$ из n° 6.6.1 есть изоморфизм из P на замкнутое подмногообразие в $P \times^G H$ (равное $P \times^G H$, если $G = H$); этот изоморфизм согласован с действием группы G (отметим, что G действует на $P \times^G H$ как подгруппа группы H).

6.6.5. Предположим опять, что G — групповое подмногообразие в H, и пусть $\mu = (Q, H, B, \pi)$ — главное расслоение со структурной группой H и базой B, а E — расслоенное пространство, ассоциированное с μ, со слоем типа H/G. Если γ обозначает каноническую проекцию многообразия H на H/G, положим $\delta(y) = y \cdot \gamma(e)$ для $y \in Q$ (где через e обозначен единичный элемент в H); получаем таким образом морфизм $\delta: Q \to E$, и четверка (Q, G, E, δ) есть главное расслоение. В частности, Q/G *канонически отождествляется с* E, которое изоморфно $Q \times^H H/G$[1]).

Пусть теперь $s: B \to E$ — сечение расслоения E и λ_s — обратный образ относительно s только что определенного расслоения (Q, G, E, δ). Это главное расслоение с базой B и структурной группой G, и его расширение до H изоморфно μ; *всякое расслоение, обладающее этими свойствами, может быть получено таким способом с точностью до изоморфизма;* два сечения s_1 и s_2 расслоения E определяют изоморфные расслоения тогда и только тогда, когда они преобразуются друг в друга некоторым H-B-автоморфизмом расслоения μ.

6.7. *Замены структуры*

Структуры и действия, описанные в этом параграфе, согласованы с заменами структуры, описанными в n°n° 5.13 и 5.14.

---

[1]) В *топологическом* случае (см. примечание на стр. 70) необходимо предположить, что правые сдвиги элементами группы G превращают H в *главное расслоенное пространство* со структурной группой G и базой H/G; то же самое можно выразить, сказав, что существует непустое открытое подмножество в H/G, над которым проекция $H \mapsto H/G$ допускает *непрерывное сечение*. В категории многообразий аналогичное условие всегда выполнено (см. n° 6.2.4).

§ 7. Векторные расслоения

Во всем этом параграфе буквой B обозначается многообразие класса C^r ($r \geqslant 1$) и буквой M — множество, наделенное отображением π из M в B. Говорят, что B есть база для M, и для всякого $b \in B$ через M_b обозначается подмножество $\pi^{-1}(b)$ в M, называемое слоем множества M в b.

7.1. *Определение векторных расслоений*

7.1.1. *Векторная карта* на M есть тройка $t = (U, \varphi, F)$, где U — открытое в B подмножество, F — банахово пространство и φ — такая биекция из $\pi^{-1}(U)$ на $U \times F$, что $\pi(\varphi^{-1}(b, h)) = b$ для всякого $b \in B$ и всякого $h \in F$. Говорят, что U есть *область определения* векторной карты t и что t — векторная карта на M в $b \in B$, если $b \in U$. Для всякого $b \in U$ через t_b обозначается биекция из F на M_b, определяемая формулой $t_b(h) = \varphi^{-1}(b, h)$ для $h \in F$.

7.1.2. Говорят, что две векторные карты $t = (U, \varphi, F)$ и $t' = (U', \varphi', F')$ на M являются C^r-согласованными (или просто согласованными), если существует такое отображение λ класса C^r многообразия $U \cap U'$ в банахово пространство $\mathscr{L}(F; F')$, что

$$t_b = t'_b \circ \lambda(b) \text{ для всякого } b \in U \cap U'.$$

7.1.3. Говорят, что некоторое множество векторных карт на M есть векторный C^r-атлас (или просто векторный атлас) на M, если оно состоит из попарно C^r-согласованных векторных карт, области определения которых покрывают все B. Говорят, что два векторных атласа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на M C^r-эквивалентны (или эквивалентны), если $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ также есть векторный атлас на M. Это отношение есть отношение эквивалентности.

7.1.4. Структура *векторного расслоения* класса C^r (с базой B) на M есть задание класса эквивалентных векторных атласов (*Теор. множ.*, гл. II, § 6, n° 9). Векторная карта, принадлежащая векторному

атласу этого класса, называется векторной картой на векторном расслоении M.

Пусть M — векторное расслоение с базой B. Для всякого $b \in B$ на слое M_b существует одна и только одна такая структура банахова пространства, что для всякой векторной карты $t = (U, \varphi, F)$ в b на векторном расслоении M отображение t_b есть изоморфизм из F на M_b.

Пусть $c = (U, \psi, E)$ — карта на многообразии B и $t = (U, \varphi, F)$ — векторная карта на векторном расслоении M с той же областью определения U. Для $x \in \overset{-1}{\pi}(U)$ положим

$$\alpha(x) = (\psi(\pi(x)), \overset{-1}{t_{\pi(x)}}(x)).$$

Тогда тройка $(\overset{-1}{\pi}(U), \alpha, E \times F)$ есть карта на множестве M. На M существует одна и только одна такая структура многообразия класса C^r (говорят, что она лежит ниже M), для которой все полученные таким способом карты суть карты на многообразии M. Тройка (M, B, π) есть тогда *расслоение* (6.1.1).

7.1.5. Пусть F — банахово пространство. Положим $M = B \times F$, причем отображением служит проекция на первый сомножитель. На M существует одна и только одна структура векторного расслоения (с базой B), для которой (B, Id_M, F) есть векторная карта. Говорят, что $B \times F$, наделенное этой структурой, есть *тривиальное векторное расслоение* с базой B и слоем F, и иногда обозначают его через F_B. Структура многообразия на F_B есть структура произведения многообразий, и для каждого $b \in B$ отображение $h \mapsto (b, h)$ есть изоморфизм банаховых пространств из F на слой расслоения F_B в точке $b \in B$. Через 0 часто обозначается тривиальное векторное расслоение со слоем, сводящимся к 0.

7.1.6. Пусть M — векторное расслоение с базой B. Для $b \in B$ *рангом* расслоения M, обозначаемым через $\mathrm{rg}_b\, M$, называется размерность (конечная или равная $+\infty$) банахова пространства M_b. Имеем $\dim_x M = \dim_b B + \mathrm{rg}_b\, M$, где $b = \pi(x)$. Функция $b \mapsto \mathrm{rg}_b\, M$ локально постоянна. Говорят, что M имеет *конечный ранг*, если $\mathrm{rg}_b\, M < +\infty$ для всякого $b \in B$.

7.2. Морфизмы векторных расслоений

7.2.1. Пусть B и B' — два многообразия и f — морфизм из B в B'. Пусть M — векторное расслоение с базой B и M' — векторное расслоение с базой B'. Говорят, что отображение g из M в M' есть *f-морфизм* векторных расслоений, если выполнено следующее условие:

Для всякой точки $b_0 \in B$ существуют такие векторная карта $t = (U, \varphi, F)$ на M в b_0, векторная карта $t' = (U', \varphi', F')$ на

M' в $f(b_0)$ и отображение λ класса C^r из U в $\mathcal{L}(F;\ F')$, что $f(U)\subset U'$ и что $g_b\circ t_b = t'_{f(b)}\circ\lambda(b)$ для всякого $b\in U$, где g_b — ограничение отображения g на M_b.

При этих предположениях g есть морфизм многообразий, и для всякого $b\in B$ он индуцирует непрерывное линейное отображение из M_b в $M'_{f(b)}$. *Векторным рангом* морфизма g в $b\in B$, обозначаемым через $\mathrm{rg}_b(g)$, называется ранг (конечный или равный $+\infty$) линейного отображения g_b.

Обратно, если $r\geqslant\infty$ или если M имеет конечный ранг, то f-морфизм расслоения $(M,\ B,\ \pi)$ в расслоение $(M',\ B',\ \pi')$, индуцирующий на каждом слое M_b *линейное* отображение из M_b в $M'_{f(b)}$ (для всякого $b\in B$), есть f-морфизм векторных расслоений.

7.2.2. Пусть дополнительно f' — морфизм из B' в многообразие B''. Если g есть f-морфизм из M в M' и если g' есть f'-морфизм из M' в векторное расслоение M'' с базой B'', то отображение $g'\circ g$ является $(f'\circ f)$-морфизмом из M в M''. Имеем $(g'\circ g)_b = g'_{f(b)}\circ g_b$ для всякого b из B.

7.2.3. Пусть M и M' — два векторных расслоения с одной базой B. Будем называть *B-морфизмом* или просто *морфизмом* из M в M' всякий Id_B-морфизм. Композиция двух морфизмов есть морфизм.

Пусть g — морфизм векторного расслоения M в векторное расслоение M'; если g биективен, он есть изоморфизм многообразия M на многообразие M', обратное отображение g^{-1} является морфизмом векторного расслоения M' в векторное расслоение M и имеем $(g^{-1})_b = g_b^{-1}$ для всякого b из B. Отображение g есть тогда *изоморфизм* векторных расслоений.

7.2.4. Пусть f — морфизм многообразия B' в B, и пусть M — векторное расслоение с базой B. Положим $M' = B'\times_B M$ и обозначим через π' (соотв. g) ограничение на M' проекции из $B'\times M$ на B' (соотв. M). На M' существует одна и только одна структура векторного расслоения с базой B' (относительно π'), при которой g есть f-морфизм. Говорят, что M' есть векторное расслоение с базой B', являющееся *обратным образом* расслоения M относительно f и обозначаемое через f^*M; f-морфизм g называется каноническим f-морфизмом из f^*M в M.

Структура многообразия на f^*M есть структура расслоенного произведения многообразий B' и M над B (5.11.2); для всякого $b\in B'$ отображение $x\mapsto(b,\ x)$ есть изоморфизм банахова пространства $M_{f(b)}$ на банахово пространство $(f^*M)_b$.

Построение обратных образов векторных расслоений транзитивно.

Пусть N' — векторное расслоение с базой B', и пусть h есть f-морфизм из N' в M. Существует один и только один такой B'-морфизм $\tilde{h}$ из N' в f^*M, что $h = g \circ \tilde{h}$.

Пусть N — векторное расслоение с базой B, и пусть v есть B-морфизм из N в M. Существует один и только один такой B'-морфизм из f^*N в f^*M, обозначаемый через f^*v, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} f^*N \arrow[r, "f^*v"] \arrow[d] & f^*M \arrow[d] \\ N \arrow[r, "v"] & M \end{tikzcd}$$

коммутативна.

7.2.5. Пусть B' есть *подмногообразие в* B и i — каноническая инъекция из B' в B. Если M — векторное расслоение с базой B, то обратный образ i^*M называется векторным расслоением на B', *индуцированным* расслоением M, и обозначается через $M \mid B'$. Если $t = (U, \varphi, F)$ — векторная карта на M, то $(U \cap B', \varphi \mid \pi^{-1} (U \cap B'), F)$ — векторная карта на $M \mid B'$. Канонический f-морфизм из $M \mid B'$ в M есть изоморфизм многообразий из $M \mid B'$ на подмногообразие $\pi^{-1} (B')$ в M.

7.2.6. Пусть f — морфизм многообразия B' в B, и пусть M (соотв. M') — векторное расслоение с базой B (соотв. B'). Назовем *f-коморфизмом* из M в M' B'-морфизм из f^*M в M'. Когда $B = B'$ и $f = \mathrm{Id}_B$, задание f-коморфизма из M в M' эквивалентно заданию B-морфизма из M в M'.

Пусть g — некоторый f-коморфизм из M в M'. Для $b \in B'$ отображение g_b: $x \mapsto g(b, x)$ из $M_{f(b)}$ в M'_b есть непрерывное линейное отображение.

Пусть дополнительно f' — морфизм многообразия B'' в B', и пусть h — некоторый f'-коморфизм из M' в векторное расслоение M'' с базой B''. Отображение $h \circ f'^*g$ из $f'^* (f^*M) = (f \circ f')^*M$ в M'' есть тогда $(f \circ f')$-коморфизм из M в M'', обозначаемый через $h \circ g$. Для $b \in B''$ имеем

$$(h \circ g)_b = h_b \circ g_{f'(b)}.$$

7.3. Полилинейные морфизмы

7.3.1. Пусть $M_1, \ldots, M_d$ и N — векторные расслоения с базой B и u — отображение множества $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в N. Говорят, что u есть *полилинейный морфизм* (или что u d-линеен), если выполнено следующее условие:

Для всякого $b_0 \in B$ существуют такие открытая окрестность U точки b_0 в B, векторные карты $t^j = (U, \varphi^j, F^j)$ на M_j (для $1 \leqslant j \leqslant d$) и $t = (U, \varphi, F)$ на N, а также отображение λ

класса C^r *из* U *в банахово пространство* $\mathcal{L}(F^1, \ldots, F^d; F)$ *непрерывных* d*-линейных отображений из* $F^1 \times \ldots \times F^d$ *в* F, *что*

$$(t_b \circ \lambda(b))(x_1, \ldots, x_d) = u(t_b^1(x_1), \ldots, t_b^d(x_d))$$

для всякого $b \in U$ *и всех* $x_i \in F^i$.

Всякий полилинейный морфизм u есть морфизм многообразий из расслоенного произведения $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в N и индуцирует для всякого $b \in B$ непрерывное d-линейное отображение u_b из $(M_1)_b \times \ldots \times (M_d)_b$ в N_b.

Если f — морфизм из B в многообразие B', то по определению полилинейный морфизм из $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в векторное расслоение M' с базой B' есть композиция полилинейного морфизма из $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в f^*M' и канонического f-морфизма из f^*M' в M'.

Билинейный морфизм называется также *спариванием*. Для $d = 1$ линейный морфизм является морфизмом в смысле 7.2.1. Для $d = 0$ 0-линейный морфизм отождествляется с *сечением* расслоения N (7.4).

7.3.2. *Расслоением на алгебры* с базой B называется векторное расслоение A с базой B, наделенное спариванием из $A \times_B A$ в A. Каждый слой A_b наделен тогда структурой K-алгебры. Если для $b \in B$ алгебра A_b имеет единичный элемент, обозначаемый через e_b, то отображение $b \mapsto e_b$ есть сечение расслоения A (7.4). Говорят, что расслоение на алгебры A *локально тривиально,* если для каждой точки $b_0 \in B$ существуют такие векторная карта $t = (U, \varphi, E)$ на A в точке b_0 и структура K-алгебры на E, что t_b есть изоморфизм алгебры E на алгебру A_b для всякого $b \in U$.

7.3.3. Пусть A — расслоение с базой B на ассоциативные алгебры с единичным элементом. *Расслоением на* A*-модули* с базой B называется векторное расслоение M с базой B, наделенное таким спариванием $m: A \times_B M \to M$, что для всякого $b \in B$ отображение $m_b: A_b \times M_b \to M_b$ определяет на слое M_b структуру A_b-модуля.

Пусть M и M' — два расслоения на A-модули. Назовем A*-гомоморфизмом* из M в M' всякий морфизм $g: M \to M'$ векторных расслоений с базой B, индуцирующий для любого $b \in B$ A_b-линейное отображение из M_b в M'_b.

Предположим, что A локально тривиально. Говорят, что расслоение M на A-модули *локально тривиально,* если для всякой точки b_0 из B существуют такая же, как в 7.3.2, векторная карта $t = (U, \varphi, E)$ на A в b_0, векторная карта $t' = (U, \varphi', L)$ на M в b_0 и структура E-модуля на L, такие, что для всякого $b \in U$ t'_b является t_b-изоморфизмом A_b-модуля M_b на E-модуль L.

7.3.4. Пусть A — банахова алгебра над K (например, поле, снабженное структурой конечномерной K-алгебры). Тривиальное расслоение A_B есть тогда локально тривиальное расслоение на алгебры. Локально тривиальное расслоение M на A_B-модули называется также векторным расслоением над A (с базой B). Слои M_b суть тогда топологические A-модули. Назовем f-морфизм u из M в другое векторное расслоение над A A-линейным, если отображения u_b являются A-линейными для всякого $b \in B$.

7.4. Сечения

7.4.1. Пусть M — векторное расслоение с базой B. Для всякого открытого в B подмножества U через $\mathscr{S}^r_M(U)$ обозначается множество сечений класса C^r расслоения M над U, т. е. таких морфизмов s класса C^r из U в M, что $s(b) \in M_b$ для всякого $b \in U$. Это множество наделяется структурой модуля над кольцом $\mathcal{C}^r(U)$ морфических функций с помощью правил

$$(s + s')(b) = s(b) + s'(b), \tag{1}$$

$$(\varphi . s)(b) = \varphi(b) . s(b) \tag{2}$$

для s, s' из $\mathscr{S}^r_M(U)$ и φ из $\mathcal{C}^r(U)$. Когда открытое множество U меняется, получаем пучок $\mathscr{S}^r_M$ отображений из B в M (см. n° 5.4.1), называемый *пучком сечений* расслоения M.

7.4.2. Пусть $M_1, \ldots, M_d$ и N — векторные расслоения с базой B и u — полилинейный морфизм из $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в N. Для $1 \leqslant j \leqslant d$ зададимся сечением s_j расслоения M_j над открытым в B подмножеством U; определим сечение $u(s_1, \ldots, s_d)$ расслоения N над U формулой

$$u(s_1, \ldots, s_d)(b) = u_b(s_1(b), \ldots, s_d(b)) \text{ для } b \in U.$$

Отображение $(s_1, \ldots, s_d) \mapsto u(s_1, \ldots, s_d)$ является $\mathcal{C}^r(U)$-полилинейным. Оно обозначается иногда через $\mathscr{S}(u)$.

7.4.3. Пусть f — морфизм многообразия B' в B, и пусть M — векторное расслоение с базой B. Для всякого открытого в B подмножества U и всякого $s \in \mathscr{S}^r_M(U)$ отображение $x \mapsto (x, s(f(x)))$ есть сечение класса C^r расслоения f^*M над открытым множеством $f^{-1}(U)$, которое обозначается через f^*s и называется обратным образом сечения s относительно f. Отображение $s \mapsto f^*s$ из $\mathscr{S}^r_M(U)$ в $\mathscr{S}^r_{f^*M}(f^{-1}(U))$ полулинейно по отношению к гомоморфизму $g \mapsto g \circ (f \mid f^{-1}(U))$ из $\mathcal{C}^r(U)$ в $\mathcal{C}^r(f^{-1}(U))$.

Если, кроме того, N — векторное расслоение с базой B' и g есть f-коморфизм из M в N, то через $\mathscr{S}(g)$ обозначается иногда отображение $s \mapsto g \circ f^* s$ из $\mathscr{S}^r_M(U)$ в $\mathscr{S}^r_N(f^{-1}(U))$.

7.4.4. Пусть M — векторное расслоение с базой B, имеющее *конечный ранг*. *Репером* расслоения M над открытым в B подмножеством U называется такая конечная последовательность $(s_1, \ldots, s_n)$ сечений расслоения M над U, что $(s_1(b), \ldots, s_n(b))$ есть *базис* векторного пространства M_b для всякого $b \in B$. Последовательность $(s_1, \ldots, s_n)$ есть тогда базис $\mathcal{C}^r(U)$-модуля $\mathscr{S}^r_M(U)$. Если f— морфизм многообразия B' в B, то сечения $f^* s_i$ образуют репер расслоения $f^* M$ над $f^{-1}(U)$.

7.4.5. Пусть L — поле, наделенное структурой конечномерной K-алгебры, и пусть (M, B, π) — расслоение. Предположим, что на каждом слое M_b задана структура *конечномерного* векторного пространства над L. Тогда на M существует не более чем одна структура векторного расслоения над L с базой B, согласованная с отображением π, структурой многообразия на M и векторными L-структурами на слоях (7.3.4). Для того чтобы такая структура существовала, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

(FV) *Для всякого $b_0 \in B$ существуют открытая окрестность U точки b_0 в B и такой изоморфизм многообразий φ из $\pi^{-1}(U)$ на произведение $U \times F$ окрестности U и некоторого конечномерного векторного пространства F над L, что для всякого $b \in U$ биекция φ_b из M_b на F, индуцированная изоморфизмом φ, есть изоморфизм векторных пространств над полем L.*

Тройки (U, φ, F), удовлетворяющие условию (FV), являются тогда векторными картами на векторном расслоении M.

Условие (FV) эквивалентно условию

(FV′) *Для всякого $b_0 \in B$ существуют такие целое число n и n сечений $s_1, \ldots, s_n$ расслоения M над открытой окрестностью U точки b_0, что отображение*

$$(b, a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 s_1(b) + \ldots + a_n s_n(b)$$

есть изоморфизм многообразия $U \times L^n$ на многообразие $\pi^{-1}(U)$.

7.4.6. Пусть $M_1, \ldots, M_d$ и N — векторные расслоения с базой B, причем M_i имеют *конечный ранг*. Предположим, что для каждого открытого в B подмножества U задано такое $\mathcal{C}^r(U)$-полилинейное отображение φ_U из $\mathscr{S}^r_{M_1}(U) \times \ldots \times \mathscr{S}^r_{M_d}(U)$ в $\mathscr{S}^r_N(U)$, что для $V \subset U$ имеем

$$\varphi_U(s_1, \ldots, s_d)V| = \varphi_V(s_1|V, \ldots, s_d|V).$$

Существует тогда один и только один такой полилинейный морфизм u из $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в N, что $\varphi_U(s_1, \ldots, s_d)(b) = u(s_1(b), \ldots, s_d(b))$, каковы бы ни были сечения s_j расслоений M_j над открытым в B подмножеством U и точка $b \in U$.

7.4.7. Пусть f — морфизм многообразия B' в B, и пусть M (соотв. M') — векторное расслоение с базой B (соотв. B'), имеющее конечный ранг. Предположим, что для каждого открытого в B подмножества U задано $\mathcal{C}^r(U)$-полулинейное отображение φ_U из $\mathcal{S}^r_M(U)$ в $\mathcal{S}^r_{M'}(f^{-1}(U))$, такое, что

$$\varphi_U(s) \mid f^{-1}(V) = \varphi_V(s \mid V)$$

для всякого открытого $V \subset U$. Тогда существует один и только один такой f-коморфизм g из M в M', что $\varphi_U(s) = \mathcal{S}(g)(s)$ для всякого $s \in \mathcal{S}^r_M(U)$.

* 7.4.8. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок модулей над пучком колец $\mathcal{C}^r_B$. Говорят, что $\mathcal{F}$ *локально свободен,* если для каждого $b \in B$ существуют такие открытая окрестность U точки b и целое число n, что $\mathcal{F} \mid U$ изоморфен (как пучок $\mathcal{C}^r_U$-модулей) пучку $(\mathcal{C}^r_U)^n$.

Если M — векторное расслоение конечного ранга с базой B, пучок $\mathcal{S}^r_M$ локально свободен. Обратно, для всякого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на B существуют векторное расслоение M и изоморфизм пучков из $\mathcal{S}^r_M$ на $\mathcal{F}$. Если M' — другое векторное расслоение конечного ранга с базой B, то отображение $g \mapsto \mathcal{S}(g)$ есть биекция множества B-морфизмов из M в M' на множество морфизмов пучков $\mathcal{C}^r_B$-модулей из $\mathcal{S}^r_M$ в $\mathcal{S}^r_{M'}$. *

7.5. Векторные подрасслоения, векторные факторрасслоения, точные последовательности

В этом пункте векторным расслоением называется векторное расслоение с базой B и морфизм векторных расслоений является Id_B-морфизмом.

7.5.1. Пусть M — векторное расслоение. Подмножество M' в M называется *векторным подрасслоением в* M, если для всякой точки $b \in B$ существуют векторная карта $t = (U, \varphi, E)$ на M в b и замкнутое векторное подпространство F в E, допускающее топологическое дополнение, такие, что

$$\varphi(\pi^{-1}(U) \cap M') = U \times F.$$

При этих условиях на M' существует одна и только одна структура векторного расслоения, для которой каноническая инъекция из M'

в M есть морфизм. Для всякого $b \in B$ слой M_b расслоения M' есть замкнутое векторное подпространство $M' \cap M_b$ в M_b; M' есть замкнутое подмногообразие в M и структура многообразия, лежащая ниже структуры векторного расслоения на M', совпадает со структурой, индуцированной структурой многообразия на M.

7.5.2. Пусть M' — векторное подрасслоение в M. Обозначим через $R\{x, y\}$ следующее отношение эквивалентности между точками x, y в M: «существует такой элемент b в B, что $x \in M_b$, $y \in M_b$ и $x - y \in M'_b$». Тогда R есть регулярное отношение эквивалентности на M (см. n° 5.9.7). На множестве M/R существует одна и только одна такая структура векторного расслоения, что каноническое отображение из M на M/R есть морфизм. Полученное таким образом векторное расслоение обозначается через M/M' и называется фактором расслоения M по M'; для всякой точки b в B слой $(M/M')_b$ есть топологическое векторное факторпространство M_b/M'_b, и структура многообразия на M/M' есть факторструктура структуры многообразия на M.

7.5.3. Сохраним предположения из 7.5.2. Для всякой точки b_0 из B можно найти ее открытую окрестность U, банахово пространство F, являющееся прямой суммой двух замкнутых подпространств F' и F'', и изоморфизм векторных расслоений ι из F_U на $M \mid U$ со следующими свойствами:

(i) Ограничение ι' изоморфизма ι на $U \times F'$ есть изоморфизм из F'_U на $M' \mid U$.

(ii) Если ρ — каноническое отображение из M на $M'' = M/M'$ и если ι'' — ограничение изоморфизма ι на $U \times F''$, то отображение $\rho \circ \iota''$ есть изоморфизм из F''_U на $M'' \mid U$.

7.5.4. Если образ морфизма векторных расслоений $g: L \to M$ содержится в M', этот морфизм есть морфизм векторных расслоений из L в M'.

Рассмотрим теперь морфизм векторных расслоений $h: M \to N$ и предположим, что для всякого $b \in B$ ограничение морфизма h_b на M'_b нулевое. Если ρ — канонический морфизм из M на M/M', то существует один и только один такой морфизм $\bar{h}$ из M/M' в N, что $h = \bar{h} \circ \rho$.

7.5.5. Пусть P и Q — два векторных расслоения и g — морфизм из P в Q; для всякой точки b из B обозначим через N_b и I_b соответственно ядро и образ линейного отображения g_b: $P_b \to Q_b$. Положим $N = \bigcup_{b \in B} N_b$ и $I = \bigcup_{b \in B} I_b$. Говорят, что g — *локально прямой* морфизм, если N — векторное подрасслоение в P и I — векторное

подрасслоение в Q. Морфизм g определяет тогда при переходе к фактору изоморфизм из P/N на I. Говорят, что N есть *ядро* морфизма g, оно обозначается через $\operatorname{Ker} g$. Аналогично, подрасслоение I называется *образом* морфизма g и обозначается через $\operatorname{Im} g$.

Если $r \geqslant \infty$, морфизм g является *локально прямым* тогда и только тогда, когда g есть субиммерсия. Если P имеет *конечный ранг,* то морфизм g является локально прямым тогда и только тогда, когда его векторный ранг локально постоянен, или также тогда и только тогда, когда g есть субиммерсия.

7.5.6. Пусть $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$ — два морфизма векторных расслоений. Говорят, что последовательность (f, g) *локально прямая и точная,* если оба морфизма f и g локально прямые и $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. Если $g \circ f = 0$, то множество D таких точек $b \in B$, что последовательность $M_b \xrightarrow{f_b} M'_b \xrightarrow{g_b} M''_b$ прямая и точная (т. е. $\operatorname{Ker} f_b$ и $\operatorname{Im} g_b$ допускают топологические дополнения и $\operatorname{Im} f_b = \operatorname{Ker} g_b$), открыто и последовательность $M \mid D \xrightarrow{f} M' \mid D \xrightarrow{g} M'' \mid D$ локально прямая и точная.

Аналогично определяются локально прямые точные последовательности произвольной длины. Допуская вольность речи, говорят иногда о прямой точной последовательности вместо локально прямой точной последовательности.

7.5.7. Пусть $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \to 0$ — последовательность морфизмов векторных расслоений. Для того чтобы эта последовательность была локально прямой и точной, необходимо и достаточно, чтобы f был изоморфизмом из M на векторное подрасслоение $f(M)$ в M' и чтобы g определял при переходе к фактору изоморфизм векторного факторрасслоения $M'/f(M)$ на M''.

7.6. *Векторные функторы*

В этом пункте и в трех последующих n°n° 7.7—7.9 буквой I обозначено конечное множество, являющееся объединением непересекающихся подмножеств I_+ и I_-. Через $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ (и аналогично через $\mathcal{V}', \mathcal{V}''$, ...) обозначается семейство банаховых пространств, индексированное множеством I. Через $\operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ обозначается банахово пространство $\prod_{i \in I_+} \mathcal{L}(V_i; V'_i) \times \prod_{i \in I_-} \mathcal{L}(V'_i; V_i)$ и через $\mathfrak{f} = (f_i)$ — элемент из $\operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Через $\operatorname{Id} \mathcal{V}$ обозначается элемент $(\operatorname{Id}_{V_i})_{i \in I}$ из $\operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Для $\mathfrak{f} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ и $\mathfrak{f}' \in \operatorname{Hom}(\mathcal{V}', \mathcal{V}'')$ обозначим через $\mathfrak{f}' \circ \mathfrak{f}$ элемент из $\operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'')$, компоненты ко-

торого задаются формулами

$$(\mathbf{f}' \circ \mathbf{f})_i = f_i' \circ f_i, \text{ если } i \in I_+,$$
$$(\mathbf{f}' \circ \mathbf{f})_i = f_i \circ f_i', \text{ если } i \in I_-.$$

7.6.1. Скажем, что задан *векторный функтор* (соотв. *векторный функтор в конечной размерности*) *типа* I *и класса* C^r, *если всякому семейству* $\mathscr{V} = (V_i)_{i \in I}$ банаховых пространств (соотв. банаховых пространств конечной размерности над K) поставлено в соответствие банахово пространство $\tau(\mathscr{V})$ и всякому $\mathbf{f} \in \operatorname{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{V}')$ — элемент $\tau(\mathbf{f}) \in \mathscr{L}(\tau(\mathscr{V});\ \tau(\mathscr{V}'))$, причем выполняются следующие условия:

(a) $\tau(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{\tau(V)}$ и $\tau(\mathbf{f}' \circ \mathbf{f}) = \tau(\mathbf{f}') \circ \tau(\mathbf{f})$.

(b) Отображение $\tau\colon \operatorname{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{V}') \to \mathscr{L}(\tau(\mathscr{V}); \tau(\mathscr{V}'))$ принадлежит классу C^r.

7.6.2. Пусть $\mathscr{M} = (M^i)_{i \in I}$ — семейство векторных расслоений с базой B. Для $b \in B$ положим $\mathscr{M}_b = (M_b^i)_{i \in I}$. Пусть τ — векторный функтор, и пусть $\tau(\mathscr{M})$ — множество, являющееся суммой множеств $\tau(\mathscr{M}_b)$ для $b \in B$; *на* $\tau(\mathscr{M})$ *существует одна и только одна структура векторного расслоения* (с базой B относительно такого отображения π из $\tau(\mathscr{M})$ в B, что для всякого $b \in B$ имеем $\tau(\mathscr{M}_b) = \{b\}$), обладающая следующим свойством:

Пусть U — открытое в B подмножество, и для всякого i пусть $t^i = (U, \varphi_i, F_i)$ — векторная карта на M^i с областью определения U; положим $\mathscr{F} = (F_i)_{i \in I}$, и пусть ψ_b — элемент из $\operatorname{Hom}(\mathscr{M}_b, \mathscr{F})$, определенный формулой $(\psi_b)_i = (t_b^i)^{-1}$ для $i \in I_+$ и $(\psi_b)_i = t_b^i$ для $i \in I_-$; для $x \in \pi^{-1}(U)$ положим $\psi(x) = (\pi(x), \tau(\psi_{\pi(x)})(x))$. Тогда тройка $(U, \psi, \tau(\mathscr{F}))$ есть векторная карта на векторном расслоении $\tau(\mathscr{M})$.

Наделенное этой структурой, $\tau(\mathscr{M})$ называется *векторным расслоением, выведенным из семейства* $\mathscr{M}$ *с помощью векторного функтора* τ.

7.6.3. Пусть f — морфизм из B в многообразие B'. Пусть $\mathscr{M} = (M^i)$ (соотв. $\mathscr{M}' = (M'^i)$) — семейство векторных расслоений с базой B (соотв. B'), индексированное множеством I. Для всякого $i \in I_+$ пусть g_i есть f-морфизм из M^i в M'^i, и для всякого $i \in I_-$ пусть g_i есть f-коморфизм из M'^i в M^i. Положим $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$, и для $b \in B$ пусть $\mathbf{g}_b = ((g_i)_b)_{i \in I}$ (см. 7.2.1 и 7.2.6). *Существует один и только один такой* f-*морфизм, обозначаемый через* $\tau(\mathbf{g})$, *из* $\tau(\mathscr{M})$ *в* $\tau(\mathscr{M}')$, *что* $\tau(\mathbf{g})_b = \tau(\mathbf{g}_b)$ *для всякого* $b \in B$.

Если, в частности, $M^i = f^* M'^i$, а g_i — канонические морфизмы или коморфизмы, то B-морфизм из $\tau(\mathscr{M})$ в $f^*\tau(\mathscr{M}')$, определенный

морфизмом $\tau(\mathfrak{g})$ (7.2.4), есть изоморфизм: этот факт можно выразить, сказав, что τ *коммутирует с обратными образами.*

В частности, пусть B' — подмногообразие в B, и положим $\mathcal{M} \mid B' = (M^i \mid B')_{i \in I}$. Векторные расслоения $\tau(\mathcal{M}) \mid B'$ и $\tau(\mathcal{M} \mid B')$ тогда канонически B'-изоморфны.

7.6.4. Пусть $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_d$ — векторные функторы (типа I и класса C^r). Скажем, что задан *d-линейный морфизм* θ из $(\tau_1, \ldots, \tau_d)$ в τ, если всякому семейству $\mathscr{V}$ банаховых пространств, индексированному множеством I, поставлено в соответствие непрерывное d-линейное отображение $\theta_{\mathscr{V}}$ из $\tau_1(\mathscr{V}) \times \ldots \times \tau_d(\mathscr{V})$ в $\tau(\mathscr{V})$, причем выполняется следующее условие: для всякого $\mathfrak{f} \in \operatorname{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{V}')$ имеем

$$\tau(\mathfrak{f}) \circ \theta_{\mathscr{V}} = \theta_{\mathscr{V}'} \circ (\tau_1(\mathfrak{f}) \times \ldots \times \tau_d(\mathfrak{f})).$$

Для $d = 1$ говорят просто о *морфизме* из τ_1 в τ.

Пусть тогда $\mathcal{M}$ — семейство векторных пространств с базой B, индексированное множеством I. *Существует один и только один такой d-линейный B-морфизм $\theta_{\mathcal{M}}$ из $\tau_1(\mathcal{M}) \times_B \ldots \times_B \tau_d(\mathcal{M})$ в $\tau(\mathcal{M})$, что $(\theta_{\mathcal{M}})_b = \theta_{\mathcal{M}_b}$ для всякого $b \in B$.*

В обозначениях из 7.6.3

$$\tau(\mathfrak{g}) \circ \theta_{\mathcal{M}} = \theta_{\mathcal{M}'} \circ (\tau_1(\mathfrak{g}) \times \ldots \times \tau_d(\mathfrak{g})).$$

Если $d = 1$ и θ есть изоморфизм (это означает, что $\theta_{\mathscr{V}}$ — изоморфизм для всякого семейства $\mathscr{V}$), то $\theta_{\mathcal{M}}$ есть изоморфизм.

7.6.5. Определения и результаты n°n° 7.6.2—7.6.4 распространяются на случай векторных функторов в конечной размерности при условии, что все данные векторные расслоения имеют конечный ранг.

Они также распространяются на следующий случай: пусть L — поле, наделенное структурой конечномерной K-алгебры; берем в качестве τ векторный функтор над L (т. е. функтор, удовлетворяющий предположениям 7.6.1, где K заменено на L) и рассматриваем только векторные расслоения над L в смысле 7.3.4.

7.6.6. Скажем, что задан *векторный функтор* (соотв. *векторный функтор в конечной размерности*) *для изоморфизмов*, если всякому банахову пространству V (соотв. всякому конечномерному векторному пространству над K) поставлено в соответствие банахово пространство $\tau(V)$ и всякому *изоморфизму* f из V на банахово пространство V' — изоморфизм $\tau(f)$ из $\tau(V)$ на $\tau(V')$, причем выполняется условие (a) из 7.6.1 и следующее условие:

(b′) *Отображение* $f \mapsto \tau(f)$ *открытого в* $\mathcal{L}(V; V')$ *подмножества, образованного изоморфизмами из* V *на* V', *в* $\mathcal{L}(\tau(V); \tau(V'))$ *принадлежит классу* C^r.

Определения и результаты предыдущих пунктов распространяются на случай векторных функторов для изоморфизмов (при этом $I_+ = \{1\}$ и $I_- = \varnothing$), *за исключением* первого абзаца из n° 7.6.3.

7.7. Прямые суммы, расслоения полилинейных отображений, дуальное расслоение

7.7.1. Предположим, что $I_- = \varnothing$. Определим векторный функтор σ, называемый *функтором прямой суммы, полагая* $\sigma(\mathscr{V}) = \bigoplus_{i \in I} V_i$ и $\sigma(\mathrm{f}) = \bigoplus_{i \in I} f_i$. Если $\mathcal{M} = (M^i)_{i \in I}$ — семейство векторных расслоений с базой B, то векторное расслоение $\sigma(\mathcal{M})$ называется *прямой суммой* расслоений M^i и обозначается через $\bigoplus_{i \in I} M^i$. Для всякого $b \in B$ слой в b расслоения $\bigoplus_{i \in I} M^i$ есть прямая сумма слоев расслоений M^i в b.

Пусть U — открытое в B подмножество, и пусть $s_i \in \mathscr{S}^r_{M^i}(U)$ (для $i \in I$). Отображение $b \mapsto \sum_{i \in I} s_i(b)$ является тогда сечением класса C^r расслоения $M = \bigoplus_{i \in I} M^i$, обозначаемым через $\sum_i s_i$, и отображение $(s_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i s_i$ есть изоморфизм $\mathcal{C}^r(U)$-модулей из $\bigoplus_{i \in I} \mathscr{S}^r_{M^i}(U)$ на $\mathscr{S}^r_M(U)$.

Многообразие, лежащее ниже $\bigoplus_{i \in I} M^i$, отождествляется с расслоенным произведением $\Pi_B M^i$.

Через pr_i обозначается морфизм векторных расслоений из $\bigoplus_{i \in I} M^i$ в M^i, который на каждом слое $\bigoplus_{i \in I} M^i_b$ есть i-я проекция. Аналогично определяем каноническую инъекцию j_i из M^i в $\bigoplus_{i \in I} M^i$.

Пусть f — морфизм из B в многообразие B'; пусть H — второе конечное множество, и пусть $N = (N^h)_{h \in H}$ — семейство векторных расслоений с базой B'. Отображение $u \mapsto \bigoplus_{i \in I} (\mathrm{pr}_h \circ u \circ j_i)_{(h,i) \in H \times I}$ есть биекция множества f-морфизмов из $\bigoplus_{i \in I} M^i$ в $\bigoplus_{h \in H} N^h$ на множество матриц $(u_{h,i})_{(h,i) \in H \times I}$, где $u_{h,i}$ есть f-морфизм из M^i в N^h.

Если $I = \{1, 2\}$, то последовательность

$$0 \to M^1 \xrightarrow{i_1} M^1 \oplus M^2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} M^2 \to 0$$

является точной.

Обратно, пусть M — векторное расслоение с базой B, и пусть M' — векторное подрасслоение в M. Предположим, что многообразие B паракомпактно и что выполняется одно из двух следующих условий:

(i) K отлично от $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$;

(ii) $K = \mathbf{R}$, $r \neq \omega$ и многообразие B допускает разбиения единицы класса C^r (5.3.6).

Тогда существует такое векторное подрасслоение M'' в M, что M отождествляется с прямой суммой $M' \oplus M''$.

7.7.2. Предположим, что $I_+ = \{0\}$ и что $I_- = \{1, 2, \ldots, d\}$. Определим векторный функтор η_d типа I и класса C^r, положив $\eta_d(\mathscr{V}) = \mathscr{L}(V_1, \ldots, V_d; V_0)$ и $\eta_d(\mathfrak{f})(u) = f_0 \circ u \circ (f_1 \times \ldots \times f_d)$ для $u \in \eta_d(\mathscr{V})$. Если $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ — семейство векторных расслоений с базой B, то векторное расслоение $\eta_d(\mathcal{M})$ обозначается через $\mathscr{L}(M_1, \ldots, M_d; M_0)$.

Пусть u — полилинейный морфизм из $M_1 \times_B \ldots \times_B M_d$ в M_0. Отображение $\hat{u}$: $b \mapsto u_b$ тогда будет сечением расслоения $\mathscr{L}(M_1, \ldots, M_d; M_0)$, и отображение $u \mapsto \hat{u}$ биективно.

7.7.3. Сохраним обозначения из 7.7.2 и предположим дополнительно, что $d = 1$. Векторное расслоение $\mathscr{L}(M_1; M_0)$ называется тогда *расслоением гомоморфизмов из M_1 в M_0*. Его сечения соответствуют B-морфизмам из M_1 в M_0.

Если, кроме того, M_0 есть тривиальное расслоение K_B, то векторное расслоение $\mathscr{L}(M_1; K_B)$ называется *дуальным* к $M = M_1$ расслоением и обозначается через M': слой $(M')_b$ есть пространство *непрерывных* линейных форм на слое M_b расслоения M в точке $b \in B$.

Если s (соотв. t) — сечение расслоения M (соотв. M') над открытым в B множеством U, то отображение $b \mapsto (b, \langle s(b), t(b)\rangle)$ есть обозначаемое через $\langle s, t\rangle$ сечение тривиального расслоения K_B [1]).

7.8. *Расслоения полилинейных знакопеременных отображений* [2]).

7.8.1. Возьмем $I_+ = \{0\}$, $I_- = \{1\}$, и пусть d — целое число $\geqslant 1$. Мы определим векторный функтор α_d, указав в качестве $\alpha_d(\mathscr{V})$ банахово пространство непрерывных d-линейных знакопеременных

[1]) Когда M имеет конечный ранг, вместо M' пишут M^*.

[2]) В n°n° 7.8.1 — 7.8.5 надо учесть ограничения, указанные в примечании 1 на стр. 94.— *Прим. перев.*

ных отображений из V_1^d в V_0 и полагая $\alpha_d(\mathfrak{f})(u) = f_0 \circ u \circ f_1^d$ для $u \in \alpha_d(\mathscr{V})$ [1]). Векторное расслоение $\alpha_d((M_1, M_0))$ обозначается через $\mathsf{Alt}^d(M_1; M_0)$ и называется *векторным расслоением d-линейных знакопеременных отображений из M_1 в M_0*.

Каноническая инъекция из $\mathsf{Alt}^d(M_1; M_0)$ в $\mathscr{L}(M_1, \ldots, M_1; M_0)$ есть морфизм векторных расслоений. Если M_1 имеет конечный ранг или если характеристика поля K равна 0, то $\mathsf{Alt}^d(M_1; M_0)$ есть векторное подрасслоение в $\mathscr{L}(M_1, \ldots, M_1; M_0)$.

Имеем $\mathsf{Alt}^1(M_1; M_0) = \mathscr{L}(M_1; M_0)$. Полагаем $\mathsf{Alt}^0(M_1; M_0) = M_0$.

Если ω — сечение [2]) расслоения $\mathsf{Alt}^d(M_1; M_0)$ и если $s_1, \ldots, s_d$ — сечения расслоения M_1, то существует одно и только одно такое сечение расслоения M_0, обозначаемое через $\omega(s_1, \ldots, s_d)$, что

$$\omega(s_1, \ldots, s_d)(b) = \omega(b)(s_1(b), \ldots, s_d(b)) \text{ для всякого } b \in B.$$

7.8.2. Пусть φ — спаривание из $N \times_B N'$ в N'' (см. n° 7.3.1); для каждого b имеем билинейное отображение φ_b из $N_b \times N'_b$ в N''_b, определяющее (см. *Alg.*, chap. III, 3[e] éd., § 10, n° 2) билинейное отображение из $\mathsf{Alt}^d(M; N)_b \times \mathsf{Alt}^e(M; N')_b$ в $\mathsf{Alt}^{d+e}(M; N'')_b$. Совокупность этих билинейных отображений определяет спаривание u из

$$\mathsf{Alt}^d(M; N) \times_B \mathsf{Alt}^e(M; N')$$

в $\mathsf{Alt}^{d+e}(M; N'')$; если ω и ω' — соответственно сечения расслоений $\mathsf{Alt}^d(M; N)$ и $\mathsf{Alt}^e(M; N')$ над открытым множеством U, то сечение $u(\omega, \omega')$ расслоения $\mathsf{Alt}^{d+e}(M; N'')$ над U будет обозначаться через $\omega \wedge_\varphi \omega'$ и называется *внешним произведением* сечений ω и ω'.

Справедлива формула

$$(1) \qquad (\omega \wedge_\varphi \omega')(s_1, \ldots, s_{d+e}) = \\ = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \varphi(\omega(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(d)}), \omega'(s_{\sigma(d+1)}, \ldots, s_{\sigma(d+e)})),$$

[1]) В исправлении автора (Errata numero 14, p. 5) по поводу последней фразы говорится: «Мы не знаем, верно ли это утверждение. Однако, с одной стороны, оно справедливо, если характеристика поля K равна нулю или $> d$; с другой стороны, те же формулы во всех случаях определяют *векторный функтор в конечной размерности* (7.6.1). В n°n° 7.8.1 — 7.8.5 надо предполагать, что K имеет характеристику нуль либо что рассматриваемые векторные расслоения имеют конечный ранг». — *Прим. перев.*

[2]) Читатель не должен спутать это употребление буквы ω с употреблением ее в смысле, указанном на стр. 9—10.

где s_i — сечения расслоения M над U и где суммирование распространено на такие перестановки σ множества $\{1, 2, \ldots, d+e\}$, что

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(d) \text{ и } \sigma(d+1) < \cdots < \sigma(d+e).$$

7.8.3. Пусть M — векторное расслоение и A — расслоение на алгебры с базой B. Предположим, что слои A_b расслоения A суть ассоциативные коммутативные алгебры с единицей, обозначаемой через e_b. Для всякого открытого в B подмножества U через $\Omega^d(U)$ мы обозначаем $\mathcal{C}^r(U)$-модуль, образованный сечениями расслоения $\mathrm{Alt}^d(M;\ A)$, и через $\Omega^*(U)$ — прямую сумму модулей $\Omega^d(U)$ для $d \geqslant 0$. Умножения на каждом слое определяют спаривание из $A \times_B A$ в A, что задает (7.8.2) структуру градуированной алгебры на $\Omega^*(U)$, являющейся *ассоциативной и кососоммутативной.* Подалгебра $\Omega^0(U)$ есть алгебра сечений расслоения A. Элемент ω из $\Omega^1(U)$ отождествляется с U-морфизмом из $M \mid U$ в $A \mid U$ (7.7.3): если $s \in \mathcal{S}^r_M(U)$, мы обозначим через $\langle\omega, s\rangle$ сечение $\omega(s)$ расслоения A (7.4.2). Пусть $s_j \in \mathcal{S}^r_M(U)$ и $\omega_j \in \Omega^1(U)$ (для $1 \leqslant j \leqslant d$); тогда

$$(2) \qquad \omega(s_1, \ \ldots, \ s_d) = \det(\langle\omega_i, s_j\rangle) \text{ для } \omega = \omega_1 \wedge \ \ldots \ \wedge \omega_d.$$

7.8.4. Пусть $d \geqslant 1$. Существует спаривание i из $M \times_B \mathrm{Alt}^d(M; A)$ в $\mathrm{Alt}^{d-1}(M;\ A)$, ограничение которого на каждый слой задается правым внутренним произведением (см. *Alg.,* chap. III, 3^e éd., § 10, n° 6 [1]). Если s — сечение расслоения M над открытым множеством U и если $\omega \in \Omega^d(U)$, то через $i(s)\,\omega$ обозначается сечение $i(s, \omega)$ расслоения $\mathrm{Alt}^{d-1}(M;\ A)$ над U; полагаем $i(s)\,\omega = 0$ для ω из $\Omega^0(U)$.

Тем самым со всяким сечением s расслоения M над U ассоциируется эндоморфизм $\mathcal{C}^r(U)$-модуля $\Omega^*(U)$. При этом справедливы формулы

$$(3) \quad (i(s)\,\omega)(s_1, \ \ldots, \ s_{d-1}) = \omega(s, s_1, \ \ldots, \ s_{d-1}) \text{ для } \omega \in \Omega^d(U),\ d \geqslant 1,$$

$$(4) \qquad i(s) \circ i(s) = 0,$$

$$(5) \qquad i(s)\,\omega = \langle\omega, s\rangle \qquad \text{для } \omega \in \Omega^1(U).$$

$$(6) \quad i(s)\,.\,(\omega \wedge \omega') = i(s)\,\omega \wedge \omega' + (-1)^d\,\omega \wedge i(s)\,\omega' \text{ для } \omega \in \Omega^d(U).$$

$$(7) \quad i(s)(\omega_1 \wedge \ \cdots \ \wedge \omega_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle\omega_i, s\rangle\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_p.$$

В последней формуле элементы ω_i лежат в $\Omega^1(U)$, и знак ^ показывает, что символ, над которым он стоит, должен быть опущен.

---

[1]) См. также *Алг.,* гл. III, § 8, n° 4.— *Прим. перев.*

Все описанные выше операции над сечениями полилинейны над кольцом $\mathcal{C}^r(U; K)$.

7.8.5. Пусть L — банахова алгебра над K. Определения и результаты n°n° 7.7. и 7.8 распространяются на случай L-полилинейных или знакопеременных L-полилинейных отображений.

7.9. Тензорные произведения, тензорные пространства, внешняя алгебра.

Обозначения из 7.6 сохраняются. Кроме того, через L обозначается коммутативное поле, наделенное структурой конечномерной K-алгебры, и векторным расслоением будет называться векторное расслоение над L с базой B, имеющее локально конечный ранг.

7.9.1. Предположим, что $I_- = \varnothing$. Если $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ — два семейства конечномерных векторных пространств над L, индексированных множеством I, то через $\tau(\mathscr{V})$ обозначается тензорное произведение пространств V_i, где $i \in I$ (*Alg.*, chap II, 3^e éd, § 3[1])), и, если $\mathrm{f} \in \operatorname{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{V}')$, полагаем $\tau(\mathrm{f}) = \otimes f_i$. Этим определяется *векторный функтор над L в конечной размерности,* и если $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ — семейство векторных расслоений, то векторное расслоение $\tau(\mathcal{M})$ обозначается через $\bigotimes_{i \in I} M_i$ и называется *тензорным произведением* (над L) расслоений M_i.

Если s_i — сечение расслоения M_i над открытым в B подмножеством U (где $i \bigotimes_{i\in I} I$), то отображение $b \mapsto \bigotimes_{i \in I} s_i(b)$ есть сечение расслоения $\bigotimes_{i \in I} M_i$, обозначаемое через $\bigotimes_{i \in I} s_i$. Отображение $(s_i)_{i \in I} \mapsto \bigotimes_{i \in I} s_i$ полилинейно над кольцом $\mathcal{C}^r(U; L)$.

7.9.2. Канонические изоморфизмы, определенные в *Алг.,* гл. II, доставляют изоморфизмы векторных функторов. В силу 7.6.4 отсюда возникают изоморфизмы векторных расслоений. Например, имеем канонические изоморфизмы

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes M_3 \to (M_1 \otimes M_3) \oplus (M_2 \otimes M_3),$$

$$M_1^* \otimes M_2 \to \mathscr{L}(M_1; M_2)$$

и т. д.

7.9.3. Пусть M — векторное расслоение, и пусть I и J — два конечных непересекающихся множества. *Тензорное расслоение* $\mathrm{T}^I_J(M)$ определяется как тензорное произведение $\bigotimes_{\alpha \in I \cup J} M_\alpha$, где $M_\alpha = M$, если $\alpha \in I$, и $M_\alpha = M^*$, если $\alpha \in J$, где M^* — дуальное к

[1]) См. также *Алг.*, приложение I к гл. III.— *Прим. перев.*

M расслоение (см. *Alg.*, chap. III 3[e] éd, § 5, n° 6). Слой $\mathsf{T}_J^I(M)_b$ этого расслоения в точке b совпадает с тензорным пространством $\mathsf{T}_J^I(M_b)$, определенным в *Alg.*, *loc. cit.* Когда $I=\{1, \ldots, p\}$ и $J=\{p+1, \ldots, p+q\}$, вместо $\mathsf{T}_J^I(M)$ пишут $\mathsf{T}_q^p(M)$; получаем, что

$$\mathsf{T}_q^p(M)=(\otimes^p M)\otimes(\otimes^q M^*).$$

Задание *полной упорядоченности* на I и на J определяет канонический изоморфизм из $\mathsf{T}_J^I(M)$ на $\mathsf{T}_q^p(M)$.

7.9.4. Если I (соотв. J) есть объединение двух непересекающихся подмножеств I' и I'' (соотв. J' и J''), то $\mathsf{T}_J^I(M)$ канонически отождествляется с тензорным произведением $\mathsf{T}_{J'}^{I'}(M)\otimes\mathsf{T}_{J''}^{I''}(M)$. В частности, если s' (соотв. s'') — сечение расслоения $\mathsf{T}_{J'}^{I'}(M)$ (соотв. $\mathsf{T}_{J''}^{I''}(M)$), то тензорное произведение $s'\otimes s''$ отождествляется с сечением расслоения $\mathsf{T}_J^I(M)$.

7.9.5. *Дуальное* к $\mathsf{T}_J^I(M)$ расслоение отождествляется с $\mathsf{T}_I^J(M)$.

7.9.6. Пусть $i\in I$ и $j\in J$. Для всякого $b\in B$ определен гомоморфизм *свертывания* индексов i и j. Это гомоморфизм $(c_j^i)_b\colon \mathsf{T}_J^I(M_b)\to \mathsf{T}_{J-\{j\}}^{I-\{i\}}(M_b)$. Совокупность гомоморфизмов $(c_j^i)_b$ определяет морфизм векторных расслоенных пространств

$$c_j^i\colon \mathsf{T}_J^I(M)\to\mathsf{T}_{J-\{j\}}^{I-\{i\}}(M),$$

называемый также *свертыванием* индексов i и j. Аналогично определяется свертывание индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I с индексами $j_1, \ldots, j_k$ из J.

7.9.7. Пусть d — целое число $\geqslant 0$; пусть V и V' — два конечномерных векторных пространства над L и $f\in \mathrm{Hom}_L(V, V')$; положим $\lambda_d(V)=\bigwedge^d(V)$ и $\lambda_d(f)=\bigwedge^d(f)$. Этим определяется векторный функтор над L в конечной размерности, и если M — векторное расслоение, то векторное расслоение $\lambda_d(M)$ обозначается через $\bigwedge^d(M)$ и называется *d-й внешней степенью расслоения* M (над L).

Каноническое отображение из $\otimes^d V$ в $\bigwedge^d(V)$ определяет морфизм векторных функторов, откуда возникает морфизм из $\otimes^d M$ в $\bigwedge^d(M)$, называемый каноническим. Этот морфизм *сюръективен*.

Канонические изоморфизмы пространства d-полилинейных знакопеременных отображений на пространство $\bigwedge^d(V^*)$ или на $(\bigwedge^d(V))^*$ дают изоморфизмы, называемые каноническими, вектор-

ного расслоения Alt^d $(M;\ L)$ d-полилинейных знакопеременных отображений над L на векторное расслоение $\bigwedge^d (M^*)$ или на $(\bigwedge^d (M))^*$.

7.9.8. Положим теперь $\lambda (V) = \bigwedge (V)$ и $\lambda (f) = \bigwedge (f)$; этим опять определяется векторный функтор над L в конечной размерности. Векторное расслоение $\lambda (M)$ обозначается через $\bigwedge (M)$. Его слой $\bigwedge (M)_b$ в точке $b \in B$ есть внешняя алгебра (над L) слоя M_b. Векторное расслоение $\bigwedge (M)$ есть локально тривиальное расслоение на алгебры.

Определения и свойства внутренних произведений, приведенные в *Alg.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 10 [1]), немедленно распространяются на сечения векторных расслоений $\bigwedge (M)$ и $\bigwedge (M^*)$ (см. также формулы (1) — (7) из n°n° 7.8.2—7.8.4).

7.9.9. Пусть M — векторное расслоение. Для всякого целого числа n пусть B_n — (открытое) множество таких точек $b \in B$, что размерность (над L) слоя M_b равна n. Для $b \in B_n$ положим $N_b = \bigwedge^n (M_b)$, и пусть N — множество, являющееся объединением множеств N_b для $b \in B$. На N существует одна и только одна такая структура векторного расслоения, что очевидное отображение из $N \mid B_n$ в $\bigwedge^n (M) \mid B_n$ есть изоморфизм для всякого n. Наделенное этой структурой векторное расслоение N, имеющее ранг один, обозначается через $\det (M)$.

7.10. Векторные расслоения и главные расслоения

7.10.1. Пусть F — банахово пространство. Говорят, что векторное расслоение M с базой B *чистое типа* F, если все слои M_b расслоения M (для $b \in B$) изоморфны (как банаховы пространства) пространству F.

Пусть M — чистое векторное расслоение типа F с базой B, и пусть P — открытое подмногообразие векторного расслоения $\mathscr{L} (F_B;\ M)$, составленное из пар $(b,\ u)$, где $b \in B$ и где u есть *изоморфизм* из $F_b = F$ на M_b. Группа $\mathbf{GL}\ (F)$ автоморфизмов пространства F действует справа на P, если положить $(b,\ u)\ .\ g = (b,\ u \circ g)$ для $(b,\ u) \in P$ и $g \in \mathbf{GL}\ (F)$. Обозначим через π_P отображение $(b,\ u) \mapsto b$ из P в B. *Четверка* $\lambda = (P,\ \mathbf{GL}\ (F),\ B,\ \pi_P)$ (где $\mathbf{GL}\ (F)$ наделено своей канонической структурой группового многообразия (5.12.2)) *есть главное расслоение* (6.2.1); оно называется *расслоением реперов* расслоения M. Отображение $((b,\ u),\ h) \mapsto u\ (h)$ из $P \times F$ в M наделяет M структурой *расслоения, ассоциированного с* λ, *со слоем* типа F (6.5.1).

Когда $F = K^n$, можно отождествить изоморфизм u из F на M_b с базисом в M_b, являющимся образом относительно u канонического-

[1]) См. также *Алг.*, гл. III, § 8, n° 4.— *Прим. перев.*

го базиса в K^n. Расслоенное пространство реперов расслоения M отождествляется тогда с открытым подмногообразием в $M \times_B \ldots \ldots \times_B M$, образованным базисами $(e_1, \ldots, e_n)$ различных слоев расслоения M_b.

Пусть U — открытое в B подмножество, и пусть $t = (U, \varphi, E)$ — векторная карта на M с областью определения U, причем $E = F$. Отображение $b \mapsto (b, t_b)$ есть тогда *сечение* расслоения P, обозначаемое через $\tilde{t}$, и отображение $t \mapsto \tilde{t}$ является биекцией множества векторных карт на M вида (U, φ, F) на множество сечений расслоения P над U.

7.10.2. Обратно, пусть $\lambda = (Q, G, B, \pi_Q)$ — главное расслоение, и пусть φ — гомоморфизм групповых многообразий из G в группу $\mathbf{GL}(F)$ автоморфизмов банахова пространства F. Заставим G действовать слева на F, положив $g \,.\, h = \varphi(g)(h)$ $(h \in F,\ g \in G)$. Пусть M — ассоциированное с λ расслоенное пространство со слоем типа F и $\rho\colon Q \times F \to M$ — его реперное отображение (6.5.1). Пусть π — отображение из M в B, определенное формулой

$$\pi(\rho(q, h)) = \pi_Q(q) \qquad (q \in Q \text{ и } h \in F).$$

Пусть s — сечение расслоения Q над открытым в B подмножеством U; отображение

$$\tilde{s}\colon (b, h) \mapsto (s(b), h)$$

есть тогда биекция из $U \times F$ на $\overset{-1}{\pi}(U)$. *На паре* (M, π) *существует одна и только одна структура векторного расслоения с базой* B, *для которой тройки* $t_s = (U, \tilde{s}^{-1}, F)$ *суть векторные карты* (для всякого сечения s расслоения Q). Структура многообразия, лежащая ниже этой структуры, есть структура многообразия расслоенного пространства, ассоциированного с λ.

Пусть $q \in Q$; положим $b = \pi_Q(q)$, и пусть u — изоморфизм из F на M_b, определенный формулой $u(h) = \rho(q, h)$ (для $h \in F$). Отображение $f\colon q \mapsto (b, u)$ есть B-морфизм главных расслоений, согласованный с φ, из (Q, G, B, π_Q) в расслоение реперов $(P, \mathbf{GL}(F), B, \pi_P)$ векторного расслоения M.

7.10.3. Вновь примем обозначения из n° 7.6. Для всякого $i \in I$ пусть

$$\lambda_i = (P_i, G_i, B, \pi_i)$$

— главное расслоение с базой B, и предположим, что G_i действует слева на банаховом пространстве V_i при помощи гомоморфизма

$$\varphi_i\colon G_i \to \mathbf{GL}(V_i).$$

Пусть M_i — расслоенное пространство, ассоциированное с λ_i, со слоем типа V_i. Положим $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ и $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$, и пусть

λ — главное расслоение, являющееся произведением расслоений λ_i над B (6.2.5). Положим $\lambda = (P, G, B, \pi_P)$ с $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$.

Пусть теперь τ — векторный функтор. Для $g = (g_i) \in G$ пусть $\varphi(g)$ — элемент из $\operatorname{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$, определенный формулами

$$\varphi(g)_i = \varphi_i(g_i), \quad \text{если } i \in I_+,$$

$$\varphi(g)_i = \varphi_i(g_i)^{-1}, \quad \text{если } i \in I_-.$$

Группа G действует тогда на $\tau(\mathscr{V})$ при помощи морфизма $g \mapsto \tau(\varphi(g))$ из G в $\mathbf{GL}(\tau(\mathscr{V}))$.

Пусть, с другой стороны, $x = (x_i)$ — точка из P, и пусть $b = \pi_P(x)$. Для каждого i отображение θ_{x_i}, определенное в n° 6.5.2, есть изоморфизм из V_i на $(M_i)_b$. Пусть θ_x — элемент из $\operatorname{Hom}(\mathscr{V}, ((M_i)_b)_{i \in I})$, определенный формулами

$$(\theta_x)_i = \theta_{x_i}, \quad \text{если } i \in I_+,$$

$$(\theta_x)_i = \theta_{x_i}^{-1}, \quad \text{если } i \in I_-.$$

Пусть ρ — отображение $(x, h) \mapsto (b, \tau(\theta_x)(h))$ из $P \times \tau(\mathscr{V})$ в векторное расслоение $\tau(\mathscr{M})$; *отображение* ρ *наделяет* $\tau(\mathscr{M})$ *структурой расслоенного пространства, ассоциированного с* λ, *со слоем типа* $\tau(\mathscr{V})$.

Эти рассмотрения обобщаются на случай векторных функторов в конечной размерности или векторных функторов над полем L, наделенным структурой конечномерной K-алгебры.

7.11. Замена структуры

Структуры и операции, описанные в этом параграфе, согласуются с заменами структуры, описанными в n°n° 5.13 и 5.14.

§ 8. Дифференциальное исчисление порядка 1

Начиная с этого параграфа, мы следующим образом обобщаем терминологию, введенную в 6.1.6: Пусть $\lambda = (X, B, \pi)$ — расслоение (6.1.1) класса C^r. *Сечением расслоения* λ (или X, если это не повлечет путаницы) над открытым в B подмножеством U мы называем отображение s: $U \to X$, такое, что $\pi(s(x)) = x$ для всякого $x \in X$. Когда U открыто в B, мы говорим, что s есть *сечение класса* C^k $(0 \leqslant k \leqslant r)$, если, кроме того, s есть отображение класса C^k из U в X. В параграфах 6 и 7 слово «сечение» означало, таким образом, то, что мы с этого места называем сечением класса C^r.

Начиная с n° 8.3, предполагается, что

либо K *имеет характеристику* 0,

либо рассматриваемые многообразия *локально конечномерны*.

В этом последнем случае выражения «банахово пространство», «векторное расслоение», «векторный функтор» означают соответственно «конечномерное векторное пространство», «векторное расслоение конечного ранга», «векторный функтор в конечной размерности с конечномерными значениями».

8.1. Касательное расслоение

8.1.1. Пусть $r \in N_K$ и X есть K-многообразие класса C^r. Через $T(X)$ обозначается множество, являющееся объединением касательных пространств $T_x(X)$ (5.5.1) для $x \in X$, и через π—каноническое отображение из $T(X)$ на X. Пусть $c = (U, \varphi, E)$ — карта на многообразии X; для $x \in U$ и $t \in T_x(X)$ положим $\zeta_c(x, t) = (x, \theta_c^{-1}(t))$, где отображение θ_c определено в 5.5.1. Тройка $c' = (U, \zeta_c, E)$ есть векторная карта (7.1.1) на $T(X)$ (наделенном отображением π: $T(X) \to X$). На $T(X)$ существует одна и только одна структура векторного расслоения с базой X и класса C^{r-1}, такая, что для всякой карты c на многообразии X соответствующая векторная карта c' есть векторная карта на $T(X)$ [1]). Множество

[1]) Когда $K = \mathbf{R}$ и $r = 1$, $T(X)$ есть *топологическое векторное расслоение* (см. примечание в начале § 6).

$T(X)$, наделенное этой структурой, называется *касательным расслоением* к X. В частности, $T(X)$ наделено структурой *многообразия* класса C^{r-1}, и тройка $(T(X), X, \pi)$ есть *расслоение* (7.1.4).

Пусть U — открытое подмножество банахова пространства E, и пусть i — каноническая инъекция из U в E. Векторная карта $c' = (U, \zeta_c, E)$, ассоциированная с картой $c = (U, i, E)$ на U, определяет изоморфизм из $T(U)$ на *тривиальное расслоение* E_U (7.1.5); эти два расслоения отождествляются с помощью этого изоморфизма.

Если X — чистое многообразие типа E (5.1.7), то $T(X)$ есть чистое многообразие типа $E \times E$.

8.1.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r. Определим f-морфизм $T(f)\colon T(X) \to T(Y)$ векторных расслоений класса C^{r-1}, полагая $T(f)(x, t) = (f(x), T_x(f)(t))$ для $x \in X$ и $t \in T_x(X)$.

Если $f = \mathrm{Id}_X$, то $T(f) = \mathrm{Id}_{T(X)}$. Для $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ имеет место равенство $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

8.1.3. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, и пусть $f'\colon T(X) \to f^* T(Y)$ — единственный X-морфизм, такой, что $T(f) = g \circ f'$, где g — канонический морфизм $f^*T(Y) \to T(Y)$ (см. 7.2.4).

Для того чтобы f был иммерсией (соотв. субмерсией), необходимо и достаточно, чтобы последовательность $0 \to T(X) \xrightarrow{f'} f^*T(Y)$ (соотв. $T(X) \xrightarrow{f'} f^*T(Y) \to 0$) была локально прямой точной последовательностью (7.5.6). Если f — иммерсия, то расслоение коядер морфизма f' называется *нормальным* или *трансверсальным* к f расслоением. Если f — субмерсия, то расслоение ядер морфизма f' называется расслоением, *касательным к слоям* морфизма f или *относительным касательным расслоением* многообразия X над Y. Его слой $T_x(X/Y)$ в $x \in X$ есть касательное пространство в x к подмногообразию $f^{-1}(f(x))$ в X. Последовательность

$$0 \to T_x(X/Y) \xrightarrow{i} T_x(X) \xrightarrow{T_x(f)} T_{f(x)}(Y) \to 0,$$

где i — каноническая инъекция, точна.

Для того чтобы f был *этален,* необходимо и достаточно, чтобы f' был изоморфизмом.

Когда K имеет характеристику 0, для того чтобы f был *субиммерсией,* необходимо и достаточно, чтобы f' был локально прямым морфизмом.

8.1.4. Пусть X_1 и X_2 — два многообразия. Тогда $T(X_1 \times X_2) = p_1^* T(X_1) \oplus p_2^* T(X_2)$, где p_1 и p_2 суть канонические проекции (5.6.3).

8.1.5. Пусть n — целое число $\geqslant 0$; касательное расслоение $T(K^n)$ к K^n отождествляется с тривиальным расслоением со слоем K^n (8.1.1). Постоянные сечения, определенные элементами канонического базиса в K^n, образуют репер в $T(K^n)$.

Если X — многообразие и $(u^1, \ldots, u^n)$ — система координат на X в открытом подмножестве U многообразия X (5.1.10), то предыдущий репер определяет посредством переноса структуры репер расслоения $T(X)$ на U; он называется *касательным репером*, определенным с помощью $(u^1, \ldots, u^n)$, и обозначается через $(\partial/\partial u^1, \ldots, \partial/\partial u^n)$ (см. 5.5.8).

8.2. Векторные поля

Пусть X — многообразие класса C^r и U — открытое подмножество в X.

8.2.1. Сечение (не обязательно непрерывное, см. начало § 8) касательного расслоения $T(X)$ над U называется *векторным полем* на U.

8.2.2. Дуальное к $T(X)$ расслоение $T'(X)$ (7.7.3) называется *кокасательным расслоением* многообразия X. Его сечения называются *ковекторными полями*. Если f — функция класса C^k на X (где $1 \leqslant k \leqslant r$) со значениями в K, ее *дифференциал* $df \colon x \mapsto d_x f$ есть ковекторное поле класса C^{k-1}. Более общо, если f — функция класса C^k на X $(1 \leqslant k \leqslant r)$ со значениями в банаховом пространстве E, ее дифференциал df есть сечение класса C^{k-1} расслоения $\mathcal{L}(T(X); E_X)$.

8.2.3. Пусть ξ — векторное поле класса C^{r-1} на X и $f \in \mathcal{C}^r(X; F)$ — функция класса C^r со значениями в банаховом пространстве F. Через $\langle \xi, df \rangle$, или $D_\xi(f)$, или еще $\xi(f)$ обозначается функция $x \mapsto d_x f(\xi(x))$; это элемент из $\mathcal{C}^{r-1}(X; F)$. Если f фиксирована, то отображение $\xi \mapsto D_\xi(f)$ является $\mathcal{C}^{r-1}(X)$-линейным. Если $D_\xi(f) = 0$ для всякой функции f класса C^r со значениями в банаховом пространстве, определенной в открытом подмножестве многообразия X, то $\xi = 0$.

Пусть E, F, G — банаховы пространства и $(u, v) \mapsto u \,.\, v$ — билинейное непрерывное отображение из $E \times F$ в G. Пусть $f \in \mathcal{C}^r(X; E)$, $g \in \mathcal{C}^r(X; F)$ и $f \,.\, g \in \mathcal{C}^r(X; G)$ — их произведение. Если ξ — векторное поле класса C^{r-1} на X, то

$$D_\xi(f \,.\, g) = D_\xi(f) \,.\, g + f \,.\, D_\xi(g).$$

В частности, отображение D_ξ: $\mathcal{C}^r(X)$ $\mathcal{C}^{r-1}(X)$ есть дифференцирование алгебры $\mathcal{C}^r(X)$ в $\mathcal{C}^r(X)$-модуль $\to \mathcal{C}^{r-1}(X)$.

8.2.4. Предположим, что X локально *конечномерно* и что выполнено одно из двух следующих предположений:

(i) $r = \infty$ и X отделимо;

(ii) $r = \omega$ и X изоморфно открытому полидиску в K^n.

Тогда для всякого дифференцирования D алгебры $\mathcal{C}^r(X)$ существует одно и только одно векторное поле ξ класса C^r, такое, что $D = D_\xi$.

8.2.5. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — система координат на X в U и ξ — векторное поле на U. Тогда i-я координата поля ξ в касательном репере (8.1.5), определенном с помощью $(u^1, \ldots, u^n)$, есть $D_\xi(u^i)$. Другими словами,

$$\xi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} D_\xi(u^i) \, . \, \partial/\partial u^i.$$

8.2.6. Пусть φ: $X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, ξ — векторное поле на X и η — векторное поле на Y. Говорят, что ξ *φ-связано* с η, если для всякого $x \in X$ $\eta(\varphi(x)) = T_x(\varphi)(\xi(x))$. Предположим, что это так, и пусть ξ и η принадлежат классу C^{r-1}. Тогда для всякого банахова пространства E диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^r(Y;\ E) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^r(X;\ E) \\ D_\eta \downarrow & & D_\xi \downarrow \\ \mathcal{C}^{r-1}(Y;\ E) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^{r-1}(X; E) \end{array}$$

где $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, коммутативна.

Когда φ этален, для всякого векторного поля η на Y существует одно и только одно векторное поле на X, которое φ-связано с η; оно обозначается через $\varphi^*\eta$.

8.2.7. Пусть φ: $X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r. Если ω — ковекторное поле[1]) на Y, то ковекторное поле $\varphi^*\omega$ на X определяется формулой

$$(\varphi^*\omega)(x) = {}^t(T_x(\varphi))(\omega(\varphi(x))) \qquad (x \in X).$$

Более общо, пусть τ — векторный функтор (7.6) класса C^{r-1} типа (I_+, I_-), где $I_+ = \varnothing$ и I_- сводится к единственному элементу (такой функтор называется *контравариантным*). Если ω — сече-

[1])Читатель не должен смешивать это употребление буквы ω с тем, которое указано в обозначениях и соглашениях.

ние класса C^{r-1} векторного расслоения $\tau\ (T\ (Y))$ с базой Y, то сечение $\varphi^*\omega$ расслоения $\tau\ (T\ (X))$ определяется формулой $(\varphi^*\omega)(x) = \tau\ (T_x\ (\varphi))\ (\omega\ (\varphi\ (x)))\quad (x \in X)$.

8.3. *Дифференциальные формы, внешнее дифференцирование*

Напомним, что в этом и в следующих пунктах предполагается, что либо K имеет характеристику 0, либо рассматриваемые многообразия локально конечномерны.

8.3.1. Пусть X — многообразие класса C^r и F — векторное расслоение класса C^k с базой X, где $k+1 \in N_K$ и $k+1 \leqslant r$. Пусть p — целое число $\geqslant 0$, и пусть $\mathrm{Alt}^p\ (T\ (X);\ F)$ — векторное расслоение класса C^k p-линейных знакопеременных отображений из $T\ (X)$ в F (7.8.1 и примечание 1 на стр. 94). Сечение этого расслоения над открытым подмножеством U в X называется *знакопеременной дифференциальной формой* (или просто *дифференциальной формой*) на U степени p со значениями в F. Те из сечений, которые принадлежат классу C^k, образуют $\mathcal{C}^k\ (U)$-модуль, обозначаемый через ${}^k\Omega^p\ (U;\ F)$. Если E — банахово пространство, то вместо ${}^k\Omega^p\ (U;\ E_X)$ пишут ${}^k\Omega^p\ (U;\ E)$ и говорят о дифференциальных формах со значениями в E. В этих обозначениях иногда опускается k (соотв. E), если оно равно $r-1$ (соотв. K).

Дифференциальная форма степени 0 (соотв. 1) со скалярными значениями есть функция (соотв. ковекторное поле).

Пусть $\varphi\colon Y \to X$ — морфизм многообразий класса C^r, и пусть $\omega \in {}^k\Omega^p\ (X;\ F)$. Существует тогда одна и только одна форма $\varphi^*\omega \in {}^k\Omega^p\ (Y;\ \varphi^*F)$, такая, что

$$(1)\qquad (\varphi^*\omega)_y\ (v_1,\ \ldots,\ v_p) = \omega_{\varphi(y)}\ (T_y\ (\varphi)\,.\,v_1,\ \ldots,\ T_y\ (\varphi)\,.\,v_p)$$

для всякого $y \in Y$ и всякого семейства $v_1, \ldots, v_p$ элементов из $T_y\ (Y)$.

Если $\psi\colon Z \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, то

$$(2)\qquad (\varphi \circ \psi)^*\ \omega = \psi^*\ (\varphi^*\omega).$$

Когда Y есть подмногообразие в X и φ — каноническая инъекция, иногда пишут $\omega\,|\,Y$ вместо $\varphi^*\omega$ и говорят, что $\omega\,|\,Y$ *индуцирована* на Y формой ω.

8.3.2. Определения и результаты n° 7.8 применимы к дифференциальным формам. В частности, спаривание векторных расслоений $F' \times_X F'' \to F$ порождает *внешнее произведение* ${}^k\Omega^{p'}\ (U;\ F') \times {}^k\Omega^{p''}\ (U;\ F'') \to {}^k\Omega^p\ (U;\ F)$, где $p = p' + p''$; его обозначают через

$(\omega', \omega'') \mapsto \omega' \wedge \omega''$. Прямая сумма всех ${}^k\Omega^p(U; K)$ для $p \geqslant 0$ наделена, таким образом, структурой ассоциативной и кососоммутативной градуированной алгебры (*Alg.*, chap. III, p. 53).

Пусть ξ — векторное поле на X и ω — дифференциальная форма на X степени $p \geqslant 1$ со значениями в векторном расслоении F; *внутреннее произведение* поля ξ и формы ω есть дифференциальная форма $i(\xi, \omega)$ на X степени $p-1$ со значениями в F, определенная формулой

(3) $$i(\xi, \omega)_x(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \omega_x(\xi(x), v_1, \ldots, v_{p-1})$$

для всякого $x \in X$ и всякого семейства $v_1, \ldots, v_{p-1}$ элементов из $T_x(X)$. Если ω — дифференциальная форма степени 0, то полагаем $i(\xi, \omega) = 0$. Вместо $i(\xi, \omega)$ пишут также $i(\xi)\omega$ или $i_\xi\omega$. Когда $F = K_X$, данное выше определение совпадает с определением из 7.8.4.

Пусть $F' \times_X F'' \to F$ — спаривание векторных расслоений. Для $\omega' \in {}^k\Omega^{p'}(U; F')$ и $\omega'' \in {}^k\Omega^{p''}(U; F'')$ имеем

(4) $$i(\xi)(\omega' \wedge \omega'') = (i(\xi)\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'}\omega' \wedge i(\xi)\omega''.$$

8.3.3. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — система координат в открытом подмножестве U в X. Всякий элемент ω из ${}^k\Omega^p(U; F)$ единственным образом записывается в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} \cdot du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_p},$$

где $f_{i_1, \ldots, i_p}$ суть сечения класса C^k расслоения F над U; в этой формуле знак $\wedge$ относится к каноническому спариванию $K_X \times_X K_X \to K_X$, а точка, обозначающая произведение, относится к каноническому спариванию $F \times_X K_X \to F$.

8.3.4. Пусть p — целое число $\geqslant 0$ и r — элемент из N_K. Пусть E и F — банаховы пространства, U — открытое подмножество в E и $\alpha \in {}^r\Omega^p(U; F)$. Пусть $\tilde{\alpha} \in C^r(U; \mathrm{Alt}^p(E; F))$ — элемент, соответствующий α. Если $x \in U$, то дифференциал $d_x\tilde{\alpha}$ элемента $\tilde{\alpha}$ в точке x (5.5.6) лежит в $\mathscr{L}(E; \mathrm{Alt}^p(E; F))$; если $t \in E$, то $(d_x\tilde{\alpha})(t) \in \mathrm{Alt}^p(E; F)$, и если $t_1, \ldots, t_p$ лежат в E, то $(d_x\tilde{\alpha})(t)(t_1, \ldots, t_p) \in F$. Существует один и только один элемент $d\alpha$ из ${}^{r-1}\Omega^{p+1}(U; F)$, такой, что

(5) $$(d\alpha)_x(t_0, \ldots, t_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (d_x\tilde{\alpha})(t_i)(t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_p)^{1)},$$

каковы бы ни были $x \in U$ и $t_0, \ldots, t_p$ в E.

---

[1]) Знак ^ показывает, что символ, над которым он стоит, должен быть опущен (см. 7.8.4).

8.3.5. Пусть p — целое число $\geqslant 0$ и r — элемент из N_K. Пусть X — многообразие класса C^{r+1}, F — банахово пространство и $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$. Существует одна и только одна дифференциальная форма $\pi \in {}^{r-1}\Omega^{p+1}(X; F)$, такая, что для всякой карты $c = (U, \varphi, E)$ выполнено следующее условие: если ω_c — такая дифференциальная форма на $\varphi(U)$, что $\omega \mid U = \varphi^*(\omega_c)$, то имеем $\pi_c = d\omega_c$, где $d\omega_c$ определена формулой (5) из 8.3.4.

Дифференциальная форма π называется *внешним дифференциалом* формы ω; ее обозначают через $d\omega$. Она обладает следующими свойствами:

(6) Если $\psi: Y \to X$ — морфизм многообразий класса C^{r+1} и если $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$, то $\psi^*(d\omega) = d(\psi^*\omega)$; в частности, d коммутирует с операцией ограничения на подмногообразие.

(7) Для $p = 0$ отображение $d: {}^r\Omega^0(X; F) \to {}^{r-1}\Omega^1(X; F)$ совпадает с отображением, определенным в 8.2.2.

(8) Если $r \geqslant 2$ и если $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$, то $d(d\omega) = 0$[1].

(9) Для всякого линейного непрерывного отображения $u: F \to F'$ банаховых пространств $d(u(\omega)) = u(d(\omega))$, где $\omega \in {}^r\Omega^p(U; F)$.

(10) Для всякого билинейного непрерывного отображения $F' \times F'' \to F$ банаховых пространств

$$d(\omega' \wedge \omega'') = (d\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'}\omega' \wedge d\omega''$$

для $\omega' \in {}^r\Omega^{p'}(X; F')$ и $\omega'' \in {}^r\Omega^{p''}(X; F'')$.

8.3.6. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — система координат на X в U. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} \cdot du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_p}$$

— дифференциальная форма на U (где $f_{i_1, \ldots, i_p} \in C^r(U; F)$). Тогда

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} df_{i_1, \ldots, i_p} \wedge du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_p}. \tag{11}$$

8.3.7. Предположим, что K имеет *характеристику нуль*. Пусть $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$ — дифференциальная форма степени $p \geqslant 1$, такая, что $d\omega = 0$. Для всякой точки $x \in X$ найдутся ее открытая окрестность U и дифференциальная форма $\pi \in {}^r\Omega^{p-1}(U; F)$, такие, что $d\pi = \omega$ на U.

---

[1]) Если $\omega \in {}^1\Omega^p(X; F)$ и если $d\omega \in {}^1\Omega^{p+1}(X; F)$, также имеем $d(d\omega) = 0$.

8.4. *Инфинитезимальные преобразования*

Пусть $r \in N_K$ и X — многообразие класса C^{r+1}.

8.4.1. Пусть τ — векторный функтор для изоморфизмов (7.6.6) класса C^r. Если E — банахово пространство, то через $\mathbf{GL}(E)$ обозначается открытое подмножество в $\mathcal{L}(E; E)$, образованное автоморфизмами пространства E. Через τ'_E обозначается линейное отображение, касательное в единичном элементе Id_E к морфизму τ: $\mathbf{GL}(E) \to \mathbf{GL}(\tau(E))$; это линейное непрерывное отображение из $\mathcal{L}(E; E)$ в $\mathcal{L}(\tau(E); \tau(E))$.

8.4.2. Пусть E — банахово пространство, и положим $F = \tau(E)$. Пусть U открыто в E, ξ — векторное поле на U класса C^r, $\tilde{\xi}$: $U \to E$ — соответствующее отображение (получаемое при отождествлении $T(U)$ с $U \times E$ (8.1.1)) и f: $U \to F$ — отображение класса C^r. Для $x \in U$ определим элемент $(\theta_\xi . f)(x)$ из F формулой

$$(1) \qquad (\theta_\xi . f)(x) = d_x f(\tilde{\xi}(x)) - \tau'_E(d_x\tilde{\xi})(f(x)).$$

(Заметим, что, с одной стороны, $\tilde{\xi}(x) \in E$ и $d_x f \in \mathcal{L}(E; F)$, откуда $d_x f(\xi(x)) \in F$, а с другой стороны, $d_x\tilde{\xi} \in \mathcal{L}(E; E)$, $\tau'_E(d_x\tilde{\xi}) \in \mathcal{L}(F; F)$ и $f(x) \in F$, откуда $\tau'_E(d_x\tilde{\xi})(f(x)) \in F$.)

Функция $\theta_\xi . f$: $x \mapsto (\theta_\xi . f)(x)$ принадлежит классу C^{r-1} в U.

8.4.3. Обозначим через F векторное расслоение $\tau(T(X))$ (7.6.2 и 7.6.6). Пусть ξ — векторное поле на X и f — сечение расслоения F, причем оба принадлежат классу C^r. Пусть x — точка в X и $c = (U, \varphi, E)$ — карта на X в x. Пусть $c' = (U, \zeta_c, E)$ — соответствующая векторная карта на $T(X)$ (8.1.1) и $\tau(c') = (U, \psi_c, \tau(E))$ — соответствующая векторная карта на F (7.6.2). Положим $x_c = \varphi(x)$; пусть ξ_c — отображение из $\varphi(U)$ в E, такое, что $\zeta_c(\xi(u)) = (u, \xi_c(\varphi(u)))$ и f_c — отображение из $\varphi(U)$ в $\tau(E)$, такое, что $\psi_c(f(u)) = (u, f_c(\varphi(u)))$ для всякого $u \in U$. Обозначим через a_c элемент $(\theta_{\xi_c} . f_c)(x_c)$ из $\tau(E)$, определенный в 8.4.2. Существует один и только один элемент a из F_x, такой, что $\psi_c(a) = (x, a_c)$ для всякой карты c на X в x. Он обозначается через $(\theta_\xi . f)(x)$ и зависит только от ростков поля ξ и сечения f в точке x (и даже лишь от их струй порядка 1 (12.1.2)).

Отображение $\theta_\xi . f$: $x \mapsto (\theta_\xi . f)(x)$ есть сечение класса C^{r-1} расслоения F; оно K-билинейным образом зависит от пары (ξ, f).

8.4.4. Сохраним предыдущие предположения и соглашения. Существует (7.6.4) один и только один морфизм векторных расслое-

ний τ' из $\mathcal{L}(T(X); T(X))$ в $\mathcal{L}(F; F)$, такой, что для всякого $x \in X$ ограничение морфизма τ' на слой $\mathcal{L}(T(X); T(X))_x = \mathcal{L}(T_x(X); T_x(X))$ равно $\tau'_{T(x)}$ (8.4.1). Если g — функция класса C^r на X со значениями в K, то

$$\theta_{g\xi}.f = g\theta_{\xi}.f - \tau'(dg \otimes \xi)(f)$$

(в этой формуле сечение $dg \otimes \xi$ расслоения $T'(X) \otimes T(X)$ отождествляется с сечением расслоения $\mathcal{L}(T(X); T(X))$; его образ $\tau'(dg \otimes \xi)$ есть сечение расслоения $\mathcal{L}(F; F)$ и преобразует f в сечение расслоения F).

8.4.5. Пусть I — открытое подмножество в K, содержащее 0, U открыто в X и φ — отображение класса C^r из $I \times U$ в X. Для $(t, x) \in I \times U$ через $\varepsilon_{t,x}$ обозначим вектор $(1, 0) \in K \times T_x(X) = T_{(t,x)}(I \times U)$. Для $t \in I$ через φ_t обозначается отображение из U в X, определенное формулой $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ $(x \in U)$. Предполагается, что выполняются следующие три условия:

a) φ_0 есть каноническая инъекция из U в X;

b) для всякого $t \in T$ отображение φ_t есть изоморфизм многообразий класса C^r из U на открытое подмножество в X;

c) сечение $(t, x) \mapsto T_{(t,x)}(\varphi)(\varepsilon_{t,x})$ расслоения $\varphi^* T(X)$ принадлежит классу C^r.

Более того, полагаем

d) $\xi(x) = T_{(0,x)}(\varphi)(\varepsilon_{0,x})$ для всякого $x \in U$.

Отображение $\xi\colon x \mapsto \xi(x)$ есть векторное поле класса C^r на U. Его называют *начальным* (или *исходным*) полем для φ.

Пусть τ — векторный функтор для изоморфизмов класса C^r; положим $F = \tau(T(X))$, и пусть f — сечение класса C^r расслоения F над X. Для $x \in U$ и $t \in I$ положим $\overset{*}{\varphi_t} f(x) = \tau(T_x(\varphi_t)^{-1})(f(\varphi_t(x)))$; это элемент из F_x. Отображение $t \mapsto \overset{*}{\varphi_t} f(x)$ из I в F_x принадлежит классу C^{r-1} для каждой точки $x \in U$, и

$$\frac{d}{dt}(\overset{*}{\varphi_t} f(x))_{t=0} = (\theta_\xi . f)(x) \quad \text{для всякой точки } x \in U. \tag{2}$$

8.4.6. Если заданы векторное поле ξ класса C^r на X и точка x_0 в X, то существуют открытое подмножество I в K, содержащее 0, открытое подмножество U в X, содержащее x_0, и отображение $\varphi\colon I \times U \to X$ класса C^r, удовлетворяющие условиям a), b), c) из 8.4.5 и такие, что начальное поле для φ есть сужение $\xi \mid U$ поля ξ на U.

8.4.7. *Пример*. Пусть F — банахово пространство и p — целое число $\geqslant 0$. Если V — банахово пространство, положим $\alpha_p(V) =$

$= \mathrm{Alt}^p(V;\ F)$; если u — изоморфизм из V на банахово пространство V', обозначим через $\alpha_p(u)$ изоморфизм пространства $\alpha_p(V)$ на $\alpha_p(V')$, полученный из u посредством переноса структуры. Тем самым получаем векторный функтор для изоморфизмов, обозначаемый через α_p (7.8.1 и примечание 1 на стр. 94). К нему можно применить вышеизложенное; имеем

$$\alpha_p(T(X)) = \mathrm{Alt}^p(T(X);\ F).$$

Сечения расслоения $\alpha_p(T(X))$ суть дифференциальные формы степени p на X со значениями в F; если ω — такая форма и ξ — векторное поле на X, оба — класса C^r, то $\theta_\xi\,.\,\omega$ есть дифференциальная форма степени p на X со значениями в F и класса C^{r-1}. Имеем

(3) $$\theta_\xi\,.\,\omega = d(i(\xi)\,\omega) + i(\xi)\,d\omega$$

и, если $r \geqslant 2$,

(4) $$\theta_\xi\,.\,d\omega = d(\theta_\xi\,.\,\omega).$$

Когда $p = 0$, функтор α_p есть постоянный векторный функтор, определенный пространством F; расслоение $\alpha_0(T(X))$ отождествляется с тривиальным расслоением F_X, и сечения этого расслоения отождествляются с функциями на X со значениями в F. Если ξ — векторное поле класса C^r на X и если $f \in \mathscr{C}^r(X;\ F)$, то

(5) $$\theta_\xi\,.\,f = \langle \xi,\ df\rangle = D_\xi(f) \qquad (8.2.3);$$

это элемент из $\mathscr{C}^{r-1}(X;\ F)$.

8.4.8. Пусть τ и τ_1 — два векторных функтора для изоморфизмов. Морфизм векторных функторов $h\colon \tau_1 \to \tau$ определяет морфизм векторных расслоений, обозначаемый по-прежнему через h, из $\tau_1(T(X))$ в $\tau(T(X))$ (7.6.4) и сопоставляет сечению f расслоения $\tau_1(T(X))$ сечение $h(f)$ расслоения $\tau(T(X))$. Если ξ — векторное поле на X и если f и ξ принадлежат классу C^r, то $\theta_\xi\,.\,h(f) = h(\theta_\xi\,.\,f)$.

Более общо, пусть $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_d$ — векторные функторы для изоморфизмов, и пусть $h\colon (\tau_1, \ldots, \tau_d) \to \tau$ есть d-линейный морфизм (7.6.4). Пусть $f_i \in \mathscr{S}^r_{\tau_i(T(X))}(X)$ (для $i = 1, \ldots, d$), и пусть ξ — векторное поле класса C^r на X. Имеем

(6) $$\theta_\xi\,.\,h(f_1, \ldots, f_d) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d} h(f_1, \ldots, f_{i-1}, \theta_\xi\,.\,f_i, f_{i+1}, \ldots, f_d).$$

Например, если f — сечение расслоения $\tau(T(X))$ и g — функция на X со значениями в K, оба — класса C^r, то

(7) $$\theta_\xi\,.\,(gf) = (\theta_\xi\,.\,g)\,f + g\,(\theta_\xi\,.\,f).$$

Если ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы класса C^r со значениями в банаховых пространствах F_1 и F_2 соответственно, то

(8) $$\theta_\xi . (\omega_1 \wedge \omega_2) = (\theta_\xi . \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\theta_\xi . \omega_2),$$

где внешнее произведение берется по отношению к билинейному непрерывному отображению из $F_1 \times F_2$ в банахово пространство F.

8.4.9. Пусть τ — векторный функтор для изоморфизмов, контравариантный (8.2.7) класса C^r, φ: $X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^{r+1}, ξ (соотв. η) — векторное поле класса C^r на X (соотв. Y), такие, что ξ φ-связано с η (8.2.6). Для всякого сечения f расслоения τ $(T(Y))$ класса C^r

$$\varphi^* (\theta_\eta . f) = \theta_\xi \cdot \varphi^* f.$$

8.5. *Коммутатор*

Пусть $r \in N_K$ и X — многообразие класса C^{r+1}.

8.5.1. Применим определения из n° 8.4, беря в качестве τ тождественный функтор: $\tau(V) = V$ для всякого банахова пространства V и $\tau(u) = u$ для всякого изоморфизма u банаховых пространств. Тогда $\tau(T(X)) = T(X)$. Если ξ и η — два векторных поля класса C^r на X, полагаем

(1) $$[\xi, \eta] = \theta_\xi . \eta;$$

это векторное поле класса C^{r-1} на X, именуемое *коммутатором* (или *скобкой*) полей ξ и η.

8.5.2. Отображение $(\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]$ K-билинейно и кососимметрично. Если f и g — функции класса C^r на X со значениями в K, то

(2) $$[f\xi, g\eta] = fg\,[\xi, \eta] + (fD_\xi g)\,\eta - (gD_\eta f)\,\xi.$$

8.5.3. Пусть F — банахово пространство. В пространстве отображений из $C^{r+1}(X; F)$ в $C^{r-1}(X; F)$

(3) $$D_{[\xi,\eta]} = D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi.$$

Если $r \geqslant 2$ и если ζ — третье векторное поле класса C^r на X, то

(4) $$[[\xi, \eta], \zeta] = [\xi, [\eta, \zeta]] - [\eta [\xi, \zeta]]$$ [1]

или еще

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0.$$

[1]) Формула (4) верна также, если предположить только, что векторные поля $\xi, \eta, \zeta, [\xi, \eta], [\eta, \zeta], [\zeta, \xi]$ все принадлежат классу C^1.

Более общо, если $r \geqslant 2$ и если τ — векторный функтор для изоморфизмов, то

(5) $$\theta_{[\xi, \eta]} = \theta_\xi \circ \theta_\eta - \theta_\eta \circ \theta_\xi$$

в пространстве отображений из $\mathscr{S}^r_F(X)$ в $\mathscr{S}^{r-2}_F(X)$ (где $F = \tau(T(X))$).

Если $r \geqslant \infty$, то векторные поля класса C^r на X образуют *K-алгебру Ли* относительно операции коммутирования (*Группы Ли*, гл. I, § 1, n° 2).

8.5.4. Пусть E — банахово пространство, U открыто в E, ξ и η — два векторных поля класса C^r на U, отождествленные с элементами из $C^r(U; E)$. Их коммутатор задается формулой

(6) $$[\xi, \eta] = D_\xi \eta - D_\eta \xi.$$

8.5.5. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — система координат на X в открытом подмножестве U. Пусть $\xi = \sum a^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ и $\eta = \sum b^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ — два векторных поля класса C^r на U. Положим $[\xi, \eta] = \sum c^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Имеем

(7) $$c^i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(a^j \frac{\partial b^i}{\partial u^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial u^j} \right).$$

8.5.6. Пусть $\varphi: X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^{r+1}, ξ_1 и ξ_2 — два векторных поля на X, η_1 и η_2 — два векторных поля на Y, оба — класса C^r. Если ξ_1 и ξ_2 φ-связаны с η_1 и η_2 соответственно, то $[\xi_1, \xi_2]$ φ-связано с $[\eta_1, \eta_2]$.

8.5.7. Пусть ω — дифференциальная форма степени p на X со значениями в банаховом пространстве F и класса C^r, и пусть $\xi_0, \ldots, \xi_p$ — векторные поля класса C^r на X. Имеем

(8) $$(\theta_{\xi_0} \cdot \omega)(\xi_1, \ldots, \xi_p) = D_{\xi_0}\omega(\xi_1, \ldots, \xi_p) - \sum_{i=1}^{p} \omega(\xi_1, \ldots, [\xi_0, \xi_i], \ldots, \xi_p)$$

и

(9) $$d\omega(\xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i D_{\xi_i}\omega(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p).$$

Если ξ и η — векторные поля класса C^r, то

(10) $$\theta_\xi \circ i(\eta) - i(\eta) \circ \theta_\xi = i([\xi, \eta])$$

в пространстве отображений из ${}^r\Omega^p(X; F)$ в ${}^{r-1}\Omega^{p-1}(X; F)$.

При $p = 1$ формула (9) записывается так:

$$(11) \qquad d\omega(\xi, \eta) = D_\xi \langle \eta, \omega \rangle - D_\eta \langle \xi, \omega \rangle - \langle [\xi, \eta], \omega \rangle.$$

8.6. Поднятия

Пусть $r \in N_K$, и пусть $g\colon X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^{r+1}.

8.6.1. *Поднятие* морфизма g в $T(Y)$ есть отображение $\psi\colon\ X \to T(Y)$, такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & T(Y) \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна, где π обозначает каноническую проекцию многообразия $T(Y)$ на Y. Задание ψ эквивалентно заданию сечения векторного расслоения $g^*T(Y)$, являющегося обратным образом относительно g расслоения $T(Y)$.

Понятие поднятия обобщает понятие векторного поля (к которому оно сводится, когда $g = \mathrm{Id}_X$). Важная часть определений и результатов, относящихся к θ_ξ и $i(\xi)$, распространяется на поднятия; мы ограничимся кратким указанием некоторых из них.

8.6.2. Пусть $\psi\colon X \to T(Y)$ — поднятие морфизма $g\colon X \to Y$, и пусть ω — дифференциальная форма степени p на Y со значениями в векторном расслоении F с базой Y. При $p \geqslant 1$ через $i(\psi, \omega)$ или $i(\psi)\,\omega$, или $i_\psi(\omega)$ обозначается дифференциальная форма на X степени $p - 1$ со значениями в g^*F, такая, что

$$(1) \quad i(\psi, \omega)_x (v_1, \ldots, v_{p-1}) = \omega_{g(x)} (\psi(x), T_x(g) \,.\, v_1, \ldots, T_x(g) \,.\, v_{p-1})$$

для всякого $x \in X$ и всякого семейства $v_1, \ldots, v_{p-1}$ элементов из $T_x(X)$. При $p = 0$ полагаем $i(\psi, \omega) = 0$. Говорят, что $i(\psi, \omega)$ есть *внутреннее произведение* ψ и ω; если ψ и ω принадлежат классу C^r, то же верно для $i(\psi, \omega)$. Пусть $F' \times_Y F'' \to F$ — спаривание векторных расслоений с базой Y. Для $\omega' \in {}^r\Omega^{p'}(Y; F')$ и $\omega'' \in {}^r\Omega^{p''}(Y; F'')$ справедлива формула

$$(2) \qquad i(\psi)(\omega' \wedge \omega'') = (i(\psi)\,\omega') \wedge g^*\omega'' + (-1)^{p'} g^*\omega' \wedge i(\psi)\,\omega''.$$

8.6.3. *Примеры*

a) Векторное поле ξ на X определяет поднятие $T(g) \circ \xi$ морфизма g в $T(Y)$ и

$$(3) \qquad i(T(g) \circ \xi) = i(\xi) \circ g^*.$$

b) Векторное поле η на Y определяет поднятие $\eta \circ g$ морфизма g в $T(Y)$ и

(4) $$i(\eta \circ g) = g^* \circ i(\eta).$$

c) Более общо, пусть $h\colon Y \to Z$ — морфизм многообразий класса C^{r+1}. Если ψ — поднятие морфизма g в $T(Y)$, то $T(h) \circ \psi$ есть поднятие морфизма $h \circ g$ в $T(Z)$ и

(5) $$i(T(h) \circ \psi) = i(\psi) \circ h^*.$$

Если φ — поднятие морфизма h в $T(Z)$, то $\varphi \circ g$ есть поднятие морфизма $h \circ g$ в $T(Z)$ и

(6) $$i(\varphi \circ g) = g^* \circ i(\varphi)$$

8.6.4. (*Инфинитезимальные преобразования.*) Пусть ψ — поднятие класса C^r морфизма g, и пусть ω — дифференциальная форма степени p на Y со значениями в банаховом пространстве F и класса C^r. Дифференциальная форма на X

(7) $$d(i(\psi)\omega) + i(\psi)\,d\omega$$

имеет степень p и принадлежит классу C^{r-1}; она обозначается через $\theta_\psi \,.\, \omega$.

Если f — функция класса C^r на X, то

(8) $$\theta_{f\psi} \,.\, \omega = df \wedge i(\psi)\,\omega + f\theta_\psi \,.\, \omega.$$

8.6.5. (*Характеризация $\theta_\psi \,.\, \omega$ как производной.*) Сохраним предположения из 8.6.4. Пусть $x \in X$. Существуют тогда открытая окрестность U точки x, открытая окрестность I элемента 0 в K и морфизм $G\colon I \times U \to Y$ класса C^r, имеющие следующие два свойства:

a) Для всякого $x \in U$ имеем $G(0, x) = g(x)$.

b) Для всякого $x \in U$ образ касательного вектора $(1, 0)$ относительно $T_{(0,x)}(G)$ равен $\psi(x)$.

Предположим, что (U, I, G) удовлетворяет этим условиям; для всякого $t \in I$ обозначим через G_t отображение $x \mapsto G(t, x)$ из X в Y; положим $\omega_t = G_t^*(\omega)$. Для всякого $x \in X$ отображение $t \mapsto \omega_t(x)$ из I в $\mathrm{Alt}^p(T_x(X), F)$ принадлежит классу C^r, и его производная в начале координат задается формулой

(9) $$\frac{d}{dt}(\omega_t(x))_{t=0} = (\theta_\psi \,.\, \omega)(x).$$

8.7. Ослабление структуры

В этом пункте предполагается, что $K = \mathbf{R}$.

8.7.1. Пусть X — многообразие класса C^s и F — векторное расслоение на X класса C^k, где $0 \leqslant k \leqslant s$. Если $0 \leqslant k' \leqslant k$, то на F су-

ществует одна и только одна структура $F_{k'}$ векторного расслоения с базой X и класса $C^{k'}$, такая, что всякая векторная карта на F есть векторная карта на $F_{k'}$. Говорят, что $F_{k'}$ получается из F *ослаблением* структуры расслоения на F.

8.7.2. Пусть $r \in N_{\mathbf{R}}$, где $r \leqslant s$, и пусть X_r — многообразие класса C^r, лежащее ниже X (5.13.1). Касательное расслоение $T(X_r)$ принадлежит классу C^{r-1}; это расслоение получается ослаблением структуры из касательного расслоения $T(X)$, принадлежащего классу C^{s-1}.

Пусть F — векторное расслоение на X класса C^k, где $0 \leqslant k \leqslant r-1$. Дифференциальные формы класса C^h на X со значениями в F канонически отождествляются с соответствующими дифференциальными формами на X_r. Различные операции над этими формами, описанные в оставшейся части этого параграфа, согласуются с этим отождествлением.

В дальнейшем мы часто будем оставлять читателю заботу об уточнении результатов подобного рода.

8.8. Почти комплексные и комплексные многообразия

В этом пункте предполагается, что $K = \mathbf{R}$, и через X обозначается (вещественное) многообразие класса C^r, где $r \in N_{\mathbf{R}}$.

8.8.1. (*Комплексные векторные расслоения.*) Векторное расслоение над $\mathbf{C}$ с базой X (7.3.4) называется также *комплексным векторным расслоением* с базой X. Если M — такое векторное расслоение, то *комплексной векторной картой* на M называется тройка (U, φ, E), где U — открытое подмножество в X, E — комплексное банахово пространство и φ — изоморфизм комплексных векторных расслоений из $M \mid U$ на тривиальное расслоение $E_U = U \times E$. Семейство (U_i, φ_i, E_i) комплексных векторных карт на M, области определения U_i которых покрывают X, называется *комплексным векторным атласом* на M; всякое комплексное векторное расслоение обладает комплексным векторным атласом (7.3.3).

Вместо «комплексный векторный» говорят иногда «$\mathbf{C}$-векторный». Аналогичным образом, когда хотят сказать о векторном расслоении над $\mathbf{R}$, об обычной векторной карте на этом расслоении и т. д., говорят «вещественный векторный» или «$\mathbf{R}$-векторный» вместо «векторный».

Пусть M — комплексное векторное расслоение с базой X. Существует один и только один автоморфизм j (вещественного) векторного расслоения, лежащего ниже M (7.3.3), ограничение которого на каждый слой является умножением на элемент i из $\mathbf{C}$;

квадрат автоморфизма j равен -1. Обратно, если M есть (вещественное) векторное расслоение с базой X и j — такой автоморфизм расслоения M, что $j^2 = -1$, то на M существует единственная структура комплексного векторного расслоения, допускающая M как нижележащее (вещественное) векторное расслоение и для которой j является умножением на i.

8.8.2. (*Комплексификация векторного расслоения.*) Определим векторный функтор τ, полагая $\tau(E) = E \otimes \mathbf{C}$ для всякого (вещественного) банахова пространства E и $\tau(u) = u \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ для всякого морфизма $u\colon E \to E'$ (вещественных) банаховых пространств.

Если F — векторное расслоение с базой X и класса C^k $(0 \leqslant k \leqslant r)$, то результат преобразования его функтором τ обозначается через $F \otimes \mathbf{C}$. На $F \otimes \mathbf{C}$ существует единственная структура комплексного векторного расслоения с базой X и класса C^k, согласованная со структурой (вещественного) векторного расслоения и индуцирующая на каждом слое $(F \otimes \mathbf{C})_x = F_x \otimes \mathbf{C}$ его каноническую структуру комплексного банахова пространства (*Esp. vect. top.*, chap. II, § 8, n° 1, *Exemple*). Будучи наделено этой структурой, $F \otimes \mathbf{C}$ называется *комплексификацией* расслоения F.

Пусть U — открытое подмножество в X; каноническое отображение

$$\mathscr{S}_F^k(U) \otimes \mathbf{C} \to \mathscr{S}_{F \otimes \mathbf{C}}^k(U)$$

является изоморфизмом, с помощью которого отождествляются эти пространства. Если $s \in \mathscr{S}_{F\otimes\mathbf{C}}^k(U)$, то элементы σ, τ из $\mathscr{S}_F^k(U)$, такие, что $s = \sigma + i\tau$, называются вещественной и мнимой частями элемента s; сечение $\bar{s} = \sigma - i\tau$ называется *сопряженным* к s. В частности, сечение расслоения $T(X) \otimes \mathbf{C}$ называется *комплексным векторным полем* на X.

Пусть H — комплексное векторное расслоение с базой X. Канонические изоморфизмы $\mathrm{Alt}_{\mathbf{R}}^p(T_x(X); H) \to \mathrm{Alt}_{\mathbf{C}}^p(T_x(X) \otimes \mathbf{C}; H)$ определяют изоморфизм векторных расслоений, именуемый каноническим, из $\mathrm{Alt}_{\mathbf{R}}^p(T(X); H)$ на $\mathrm{Alt}_{\mathbf{C}}^p(T(X) \otimes \mathbf{C}; H)$ (7.8.5); с его помощью мы отождествляем эти два расслоения. Пусть ω — сечение этого расслоения, другими словами, дифференциальная форма степени p на X со значениями в H, и пусть ζ — комплексное векторное поле с вещественной частью ξ и мнимой частью η. Полагаем тогда

$$i(\zeta, \omega) = i(\xi, \omega) + i \cdot i(\eta, \omega).$$

Если H — тривиальное расслоение, полагаем

$$\theta_\zeta \cdot \omega = \theta_\xi \cdot \omega + i\theta_\eta \cdot \omega.$$

Таким же образом на комплексные векторные поля распространяют по линейности операцию *коммутирования*. Формулы предыдущих пунктов остаются справедливыми.

8.8.3. *Почти комплексной структурой* класса C^k $(k \leqslant r-1)$ на X называется задание на $T(X)$ структуры *комплексного векторного расслоения* класса C^k, имеющей в качестве нижележащей вещественной структуры естественную структуру на $T(X)$. Такая структура эквивалентна заданию автоморфизма j класса C^k расслоения $T(X)$, такого, что $j^2 = -1$.

Зададимся такой структурой. Продолжим j до $\mathbf{C}$-автоморфизма расслоения $T(X) \otimes \mathbf{C}$. Существует одно и только одно разложение расслоения $T(X) \otimes \mathbf{C}$ в прямую сумму комплексных подрасслоений,

$$(1) \qquad T(X) \otimes \mathbf{C} = T'(X) \oplus T''(X),$$

такое, что j совпадает с умножением на i в $T'(X)$ и умножением на $-i$ в $T''(X)$. Проектор p' из $T(X) \otimes \mathbf{C}$ на $T'(X)$ равен $\frac{1}{2}(1 - ij)$; проектор $p'' = 1 - p'$ из $T(X) \otimes \mathbf{C}$ на $T''(X)$ равен $\frac{1}{2}(1 + ij)$. Сквозные отображения

$$\pi' : T(X) \to T(X) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{p'} T'(X),$$

$$\pi'' : T(X) \to T(X) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{p''} T''(X)$$

суть $\mathbf{R}$-изоморфизмы: первый преобразует j в умножение на i, второй — в умножение на $-i$.

8.8.4. (*Формы типа* (p, q).) Сохраним предположения и обозначения предыдущего пункта. Пусть F — комплексное векторное расслоение с базой X, пусть p и q — два целых числа $\geqslant 0$ и $n = p + q$. Пусть ω — дифференциальная форма степени n на открытом подмножестве U многообразия X со значениями в F; отождествим (8.8.2) ω с сечением расслоения $\mathrm{Alt}^p_{\mathbf{C}}(T(X) \otimes \mathbf{C}; F)$. Говорят, что ω имеет *тип* (p, q), если для всякого $x \in U$

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = 0,$$

как только $p + 1$ векторов v_i принадлежат $T'_x(X)$ или $q + 1$ векторов v_i принадлежат $T''_x(X)$. Если отождествить $\bigwedge^n T_x(X) \otimes \mathbf{C}$ с прямой суммой пространств $\bigwedge^{m'} T'_x(X) \otimes \bigwedge^{m''} T''_x(X)$ для $m' + m'' = n$ (*Alg.*, chap. III, p. 85) и ω_x с $\mathbf{C}$-линейной формой на $\bigwedge^n T_x(X)$, то же условие можно выразить, сказав, что ω_x обращается в нуль на $\bigwedge^{m'} T'_x(X) \otimes \bigwedge^{m''} T''_x(X)$ для $(m', m'') \neq (p, q)$.

Для всякой пары (p, q) целых чисел $\geqslant 0$, где $p + q = n$, существует одно и только одно такое комплексное векторное подрассло-

ение $\mathrm{Alt}^{p,q}(T(X); F)$ в $\mathrm{Alt}^n(T(X); F)$, что его сечения над открытым подмножеством U многообразия X суть дифференциальные формы типа (p, q) на U со значениями в расслоении F. Векторное расслоение $\mathrm{Alt}^n(T(X); F)$ есть прямая сумма векторных расслоений $\mathrm{Alt}^{p,q}(T(X); F)$ для $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и $p+q=n$. Всякая дифференциальная форма ω степени n со значениями в F единственным образом разлагается в сумму

$$\omega = \sum_{p+q=n} \omega_{p,q},$$

где $\omega_{p,q}$ — форма типа (p, q), называемая *компонентой типа* (p, q) формы ω. Если ω принадлежит классу C^h, где $0 \leqslant h \leqslant k$, это же имеет место для ее компонент.

Примеры

a) Дифференциальная форма степени n принадлежит типу $(n, 0)$ тогда и только тогда, когда она $\mathbf{C}$-полилинейна.

b) Пусть F', F'' и F — три комплексных векторных расслоения, и пусть $F' \times_X F'' \to F$ есть $\mathbf{C}$-билинейное спаривание. Если ω' (соотв. ω'') — дифференциальная форма типа (p', q') (соотв. (p'', q'')) со значениями в F' (соотв. F''), то дифференциальная форма $\omega' \wedge \omega''$ имеет тип $(p' + p'', q' + q'')$.

c) Предположим, что F есть комплексификация (вещественного) векторного расслоения (8.8.2). Если ω — дифференциальная форма типа (p, q) со значениями в F, то ее сопряженная форма $\overline{\omega}$ (8.8.2) имеет тип (q, p).

8.8.5. Кроме предыдущих предположений, предполагается, что $k \geqslant 1$. Тогда три следующих условия эквивалентны:

(i) Для всякого U, открытого в X, и всякой пары (ξ, η) комплексных векторных полей на U класса C^k, таких, что $\xi(x)$ и $\eta(x)$ принадлежат $T'_x(X)$ для всякого $x \in U$, имеет место включение $[\xi, \eta](x) \in T'_x(X)$ для всякого $x \in U$.

(ii) Для всякого U, открытого в X, и всякой пары (ξ, η) (вещественных) векторных полей на U класса C^k имеем

$$[\xi, \eta] + j[j\xi, \eta] + j[\xi, j\eta] - [j\xi, j\eta] = 0.$$

(iii) Для всякого U, открытого в X, и всякой комплексной дифференциальной формы ω на U типа $(1, 0)$ и класса C^k компонента типа $(0, 2)$ формы $d\omega$ равна нулю.

Предположим, что эти условия выполнены. Пусть ω — дифференциальная форма типа (p, q) на открытом в X подмножестве U, принадлежащая классу C^h, где $1 \leqslant h \leqslant k$, со значениями в комплекс-

ном банаховом пространстве F. Через $d'\omega$ (соотв. $d''\omega$) обозначается компонента типа $(p+1, q)$ (соотв. $(p, q+1)$) формы $d\omega$; другие компоненты формы $d\omega$ тогда равны нулю и

(2) $$d\omega = d'\omega + d''\omega.$$

Если $k \geqslant 2$, то

(3) $$d'(d'\omega) = 0,\ d''(d''\omega) = 0,\ d'(d''\omega) + d''(d'\omega) = 0.$$

В обозначениях из 8.8.4, пример b),

(4) $$d'(\omega' \wedge \omega'') = d'(\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'+q'} \omega' \wedge d'(\omega''),$$

(5) $$d''(\omega' \wedge \omega'') = d''(\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'+q'} \omega' \wedge d''(\omega'').$$

В обозначениях 8.8.4, пример c),

(6) $$d'(\overline{\omega}) = \overline{d''(\omega)}.$$

В формулах (4) и (5) (соотв. (6)) дифференциальные формы ω' и ω'' (соотв. ω) предполагаются формами класса C^1.

8.8.6. (*Почти комплексная структура комплексного многообразия.*) Пусть X^c — комплексно-аналитическое многообразие, допускающее X в качестве нижележащего вещественно-аналитического многообразия (5.14.2, a)). Расслоение $T(X)$ отождествляется с (вещественным) векторным расслоением, лежащим ниже комплексного векторного расслоения $T(X^c)$, что наделяет X почти комплексной структурой класса C^ω; говорят, что она индуцирована данной структурой комплексно-аналитического многообразия на X. Эта почти комплексная структура удовлетворяет условиям (i) — (iii) из 8.8.5; в частности, операторы d' и d'' из 8.8.5 определены. Если f: $X^c \to Y^c$ — морфизм комплексно-аналитических многообразий, то f^* коммутирует с операторами d' и d''.

8.8.7. Сохраним предположения и обозначения из 8.8.6. Пусть $\overline{X}^c$ — сопряженное к X^c многообразие (5.14.2, b)). Погрузим X с помощью диагонального отображения $x \mapsto (x, x)$ в комплексное многообразие $X^c \times \overline{X}^c$, и пусть g — антиавтоморфизм $(x, y) \mapsto (y, x)$ многообразия $X^c \times \overline{X}^c$. Пара $(X^c \times \overline{X}^c, g)$ есть *комплексификация* многообразия X (5.14.8). В частности, для всякого $x \in X$ касательное пространство $T_x(X^c \times \overline{X}^c)$ отождествляется с $T_x(X) \otimes \mathbf{C}$; при этом отождествлении $T_x(X^c \times \{x\})$ отвечает $T'_x(X)$, а $T_x(\{x\} \times \overline{X}^c)$ отвечает $T''_x(X)$.

8.8.8. Предположим, что $r = \omega$; всякая почти комплексная структура класса C^ω на X, удовлетворяющая эквивалентным друг другу

условиям (i) — (ii) из 8.8.5, есть почти комплексная структура, индуцированная одной и только одной структурой комплексно-аналитического многообразия на X[1]).

8.8.9. (*Голоморфные формы.*) Примем вновь предположения и обозначения из 8.8.6, и пусть F — комплексное банахово пространство. Морфические (другими словами, комплексно-аналитические) дифференциальные формы на X^c со значениями в F называются также *голоморфными* дифференциальными формами; отождествление $T(X^c)$ с $T(X)$ отождествляет их с (вещественно-аналитическими) дифференциальными формами на X. Для того чтобы дифференциальная форма ω на X степени p со значениями в F и класса C^k, где $k \geqslant 1$, была голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы она имела тип $(p, 0)$ и чтобы $d''\omega = 0$.

Пусть ξ — векторное поле на X. Говорят, что ξ *голоморфно,* если оно является комплексно-аналитическим отображением из X^c в $T(X^c) = T(X)$, другими словами, комплексно-аналитическим векторным полем на X^c. Если это так и если ω — голоморфная дифференциальная форма на X со значениями в F, то форма $\theta_\xi . \omega$ (соотв. $i(\xi)\,\omega$) одна и та же, рассматривается ли ξ как комплексно-аналитическое векторное поле на X^c и ω как элемент из $\Omega^p(X^c; F)$ или же ξ как векторное поле на X и ω как элемент из $\Omega^p(X; F)$. Более того, пусть $\xi' = \pi'(\xi)$ и $\xi'' = \pi''(\xi)$ — компоненты поля ξ в $T'(X)$ и $T''(X)$ соответственно (8.8.3); имеем

$$\theta_\xi . \omega = \theta_{\xi'} . \omega, \quad \theta_{\xi''} . \omega = 0, \tag{7}$$

$$i(\xi)\,\omega = i(\xi')\,\omega, \quad i(\xi'')\,\omega = 0. \tag{8}$$

8.8.10. *Пример.* Предположим, что X^c есть открытое подмножество в $\mathbf{C}^n$, и обозначим через $z^1, \ldots, z^n$ координатные функции на X^c. Для $1 \leqslant k \leqslant n$ положим $z^k = x^k + iy^k$, где x^k и y^k принимают вещественные значения. Рассмотрим касательный репер $(\partial/\partial z^k)$ в $T(X^c)$, определенный системой координат (z^k), и касательный репер $(\partial/\partial x^k, \partial/\partial y^k)$ в $T(X)$, определенный системой координат (x^k, y^k) (8.1.5). Имеем $j(\partial/\partial x^k) = \partial/\partial y^k$, и образ элемента $\partial/\partial z^k$ при отображении $\pi'\colon T(X) = T(X^c) \to T'(X)$ (8.8.3) равен

$$\frac{1}{2}(\partial/\partial x^k - i\partial/\partial y^k);$$

[1]) Если x конечномерно, это верно для всякой почти комплексной структуры класса C^k с $k \geqslant \dim X$ (см. Newlander A., Nirenberg L., Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math.*, LXV (1957), 391—404).

он обозначается, как правило, также через $\partial/\partial z^k$ [1]). Комплексное векторное поле, сопряженное к полю $\partial/\partial z^k$, обозначается через $\partial/\partial \bar{z}^k$; имеем

(9) $$\partial/\partial \bar{z}^k = \frac{1}{2}(\partial/\partial x^k + i\partial/\partial y^k).$$

Если f — функция класса C^1 на X со значениями в комплексном банаховом пространстве F, то дифференциальные формы $d'f$ и $d''f$ (8.8.5) задаются формулами

(10) $$d'f = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\partial f}{\partial z^k} dz^k, \quad d''f = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k.$$

Напомним, что

$$df = d'f + d''f,$$
$$dz^k = dx^k + i\,dy^k, \qquad d\bar{z}^k = dx^k - i\,dy^k.$$

Если $A = (i_1, \ldots, i_p)$ — последовательность строго возрастающих целых чисел из интервала $[1, n]$, то полагаем

$$dz^A = dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p}$$

и через $d\bar{z}^A$ обозначаем сопряженную к dz^A дифференциальную форму. Всякая дифференциальная форма ω типа (p, q) со значениями в F единственным образом записывается в виде

(11) $$\omega = \sum_{A,B} f_{A,B} dz^A \wedge d\bar{z}^B,$$

где A (соотв. B) пробегает множество строго возрастающих последовательностей с p (соотв. q) элементами из $[1, n]$, причем $f_{A,B}$ есть функция со значениями в F. Если ω принадлежит классу C^k, где $k \geqslant 1$, то таковы же и функции $f_{A,B}$ и справедливы формулы

(12) $$d'\omega = \sum_{A,B} d'f_{A,B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B,$$

(13) $$d''\omega = \sum_{A,B} d''f_{A,B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B.$$

---

[1]) Необходимо принять во внимание, что каноническое отождествление $T(X^c)$ с $T(X)$ *не преобразует* векторное поле $\partial/\partial z^k$ на X^c в векторное поле $\partial/\partial z^k$ на X, а преобразует его в векторное поле $\partial/\partial z^k + \partial/\partial \bar{z}^k$. Однако оба обозначаемые через $\partial/\partial z^k$ векторных поля принимают одинаковые значения на голоморфных дифференциальных формах (8.8.9), к которым, впрочем, лишь и можно применить векторное поле на X^c.

§ 9. Дифференциальные уравнения и слоения

В n°n° 9.1—9.3 предполагается, что K имеет характеристику 0. В n° 9.4 предполагается, что K имеет характеристику $p \neq 0$.

9.1. Интегральные кривые

В этом пункте X означает многообразие класса C^r, а ξ—векторное поле на X класса C^s, где r, s принадлежат N_K, $s \leqslant r-1$.

9.1.1. Пусть I — открытое подмножество в K и f: $I \to X$ — отображение класса C^k ($k \in N_K$, $k \leqslant r$) из I в X. Для $t \in I$ через $f'(t)$ обозначается вектор $T_t(f)(1) \in T_{f(t)}(X)$; этот вектор иногда называется *скоростью* отображения f в момент t. Когда X есть банахово пространство, $f'(t)$ является производной функции f в t.

Говорят, что f — *интегральная кривая векторного поля* ξ, если

(1) $$f'(t) = \xi(f(t))$$

для всякого $t \in I$. Такая кривая принадлежит классу C^{s+1}.

Если x — точка в X, то *интегральной кривой векторного поля* ξ *с началом в* x называется такая интегральная кривая f: $I \to X$ этого поля, что $0 \in I$ и $f(0) = x$; для всякого $x \in X$ существует интегральная кривая поля ξ с началом в x, определенная в подходящей окрестности точки 0 в K.

Если f: $I \to X$ — интегральная кривая поля ξ и если $a \in K$, то отображение $t \mapsto f(t-a)$ из $I+a$ в X есть интегральная кривая поля ξ.

Пусть f_1: $I_1 \to X$ и f_2: $I_2 \to X$ — две интегральные кривые поля ξ и $t \in I_1 \cap I_2$. Если $f_1(t) = f_2(t)$, то отображения f_1 и f_2 совпадают в окрестности точки t.

9.1.2. (*Потоки.*) Пусть W — открытое подмножество в $X \times K$. Для всякого $x \in X$ обозначим через W_x множество таких $t \in K$, что $(x, t) \in W$. *Интегральным потоком поля* ξ *с областью определения* W называется такое отображение f класса C^k ($k \leqslant r$) из W в X, что для всякого $x \in X$ отображение f_x: $W_x \to X$, определенное формулой $f_x(t) = f(x, t)$, есть интегральная кривая поля ξ и что для всякого $(x, 0) \in W$ имеем $f(x, 0) = x$.

Для всякой точки $x \in X$ существует интегральный поток поля ξ класса C^s, область определения которого есть окрестность точки $(x, 0)$ в $X \times K$. Два интегральных потока поля ξ, определенные в окрестности точки $(x, 0)$, совпадают в некоторой окрестности этой точки.

Пусть $x \in X$, и пусть f — интегральный поток поля ξ, область определения W которого есть окрестность точки $(x, 0)$. Существует такая окрестность V точки $(x, 0, 0)$ в $X \times K \times K$, что если $(x, t_1, t_2) \in V$, то

$$(x, t_1) \in W, \quad (f(x, t_1), t_2) \in W, \quad (x, t_1 + t_2) \in W$$

и

$$f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2). \tag{2}$$

Если X паракомпактно или если X отделимо, а $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то существует интегральный поток поля ξ, область определения которого есть окрестность множества $X \times \{0\}$.

9.1.3. (*Вещественный случай.*) Предполагается, что $K = \mathbf{R}$ и что X отделимо. *Интегральной дугой* поля ξ называется всякая интегральная кривая поля ξ, область определения которой есть открытый интервал в $\mathbf{R}$. Две интегральные дуги f_1 и f_2 поля ξ, определенные в интервалах I_1 и I_2 и совпадающие в некоторой точке из $I_1 \cap I_2$, совпадают в $I_1 \cap I_2$.

Для всякой точки $x \in X$ существует одна и только одна такая интегральная дуга f_x: $I_x \to X$ с началом в x, что для всякой интегральной дуги f: $I \to X$ с началом в x имеем $I \subset I_x$ и $f = f_x \mid I$. Дуга f_x называется *максимальной интегральной дугой* векторного поля ξ с началом в x, и ее область определения I_x называется иногда *интервалом жизни* точки x относительно поля ξ.

Если $I_x =]-a_-, a_+[$ и если a_+ конечно, то ограничение дуги f_x на интервал $[0, a_+[$ есть собственное отображение из $[0, a_+[$ в X. В частности, $f(t)$ не имеет предела, коль скоро t стремится к a_+.

9.1.4. В обозначениях и предположениях из 9.1.3 множество Ω таких пар $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$, что $t \in I_x$, открыто в $X \times \mathbf{R}$ и отображение f: $\Omega \to X$, определенное формулой $f(x, t) = f_x(t)$, принадлежит классу C^s; это интегральный поток поля ξ с областью определения Ω.

Функции α_+ и $\alpha_- : X \to]0, +\infty]$, определенные формулой $I_x =]-\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$, полунепрерывны снизу. Для $(x, t) \in \Omega$ и $y = f(x, t)$ имеем $\alpha_+(y) = \alpha_+(x) - t$ и $\alpha_-(y) = \alpha_-(x) + t$.

Если $t_1 \in I_x$ и $t_2 \in I_{f(x, t_1)}$, то $t_1 + t_2 \in I_x$ и

$$f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2). \tag{3}$$

Если функция α_+ (соотв. α_-) ограничена на X снизу константой > 0, то она постоянна и равна $+\infty$.

Равенство $\alpha_+ = \alpha_- = +\infty$ (другими словами, равенство $\Omega = X \times \mathbf{R}$) имеет место в каждом из следующих случаев:

(i) поле ξ имеет компактный носитель (например, если X компактно);

(ii) существует транзитивная группа автоморфизмов многообразия X, сохраняющая поле ξ;

* (iii) на X существует риманова структура, относительно которой X полно и ξ ограничено. *

Если $\Omega = X \times \mathbf{R}$, то отображение $f: X \times \mathbf{R} \to X$ есть закон правого действия класса C^s группового многообразия $\mathbf{R}$ на многообразии X; см. 5.12.5.

9.1.5. (*Комплексный случай.*) Предполагается, что $K = \mathbf{C}$ и что X отделимо. Для всякого $a \in]0, +\infty]$ обозначим через D_a открытый диск в $\mathbf{C}$ радиуса a с центром в 0. Для всякого $x \in X$ существует одно и только одно такое число $\rho(x) \in]0, +\infty]$, одна и только одна такая интегральная кривая $f_x: D_{\rho(x)} \to X$ с началом в x, что для всякого $a \in]0, +\infty]$ и всякой интегральной кривой $f: D_a \to X$ с началом в x имеем $a \leqslant \rho(x)$ и $f = f_x \mid D_a$.

Для всякого $\lambda \in \mathbf{C}$ пусть $\alpha_\lambda(x)$ — верхняя грань интервала жизни точки x относительно векторного поля $\lambda\xi$ на вещественном многообразии, получаемом из X сужением поля скаляров. Имеем $\rho(x) = \inf\limits_{|\lambda|=1} \alpha_\lambda(x)$.

Множество Δ таких пар $(x, t) \in X \times \mathbf{C}$, что $t \in D_{\rho(x)}$, открыто в $X \times \mathbf{C}$, и отображение f из Δ в X, определенное формулой $f(x, t) = f_x(t)$, есть интегральный поток поля ξ. Функция $\rho: X \to]0, +\infty]$ полунепрерывна снизу.

Для $(x, t) \in \Delta$ и $y = f(x, t)$ имеем $\rho(y) \geqslant \rho(x) - |t|$. Если ρ ограничено снизу на X константой > 0, то $\rho = +\infty$ и $\Delta = X \times \mathbf{C}$.

Если $\Delta = X \times \mathbf{C}$, отображение $f: X \times \mathbf{C} \to X$ есть закон правого действия группового многообразия $\mathbf{C}$ на многообразии X.

9.1.6. Пусть $\varphi: X \to Y$ — морфизм многообразий и η — векторное поле на Y, такие, что ξ φ-связано с η (см. 8.2.6). Если $f: I \to X$ — интегральная кривая поля ξ, то отображение $\varphi \circ f: I \to Y$ есть интегральная кривая поля η. Если $K = \mathbf{R}$ и если X и Y отделимы, то интервал жизни всякой точки $x \in X$ относительно поля ξ содержится в интервале жизни точки $\varphi(x)$ относительно поля η. Если, кроме того, φ собственно, эти интервалы равны.

9.1.7. (*Уравнения, зависящие от времени.*) Пусть W — открытое подмножество в $X \times K$, и пусть $\Xi: W \to T(X)$ — поднятие клас-

са C^s отображения pr_1: $W \to X$, т. е. такое отображение класса C^s из W в $T(X)$, что $\Xi(x, t)$ принадлежит $T_x(X)$ для всякого $(x, t) \in W$. *Интегральной кривой* для Ξ называется такое отображение f класса C^k (где $k \in N_K$ и $k \leqslant r$) открытого в K подмножества I в X, что для всякого $t \in I$ имеем

$$(f(t), t) \in W \text{ и } f'(t) = \Xi(f(t), t).$$

Пусть η — векторное поле класса C^s на W, определенное формулой $\eta(x, t) = (\Xi(x, t), (t, 1))$. Для того чтобы отображение f открытого в K подмножества I в X было интегральной кривой для Ξ, необходимо и достаточно, чтобы $t \mapsto (f(t), t)$ было интегральной кривой поля η в смысле n° 9.1.1.

Пусть g: $I \to W$ — интегральная кривая поля η и t_0 — такая точка в I, что $\mathrm{pr}_2(g(t_0)) = t_0$. Множество элементов $t \in I$, таких, что $\mathrm{pr}_2(g(t)) = t$, есть окрестность точки t_0, которая совпадает с I, если I связно.

9.1.8. (*Параметры и начальные условия.*) Пусть Z — многообразие класса C^r, W — открытое в $X \times K \times Z$ подмножество и Ξ — поднятие класса C^s отображения $\mathrm{pr}_1 : W \to X$ (8.6.1). Если $z \in Z$, обозначим через W_z множество таких $(x, t) \in X \times K$, что $(x, t, z) \in W$, и через Ξ_z — отображение $(x, t) \mapsto \Xi(x, t, z)$ из W_z в $T(X)$.

Пусть (x_0, t_0, z_0) — точка из W. Существуют тогда открытая окрестность $X_1 \times I_1 \times Z_1$ точки (x_0, t_0, z_0) в W и отображение класса C^s

$$f\colon X_1 \times I_1 \times I_1 \times Z_1 \to X,$$

такие, что, какова бы ни была точка $(x_1, t_1, z_1) \in X_1 \times I_1 \times Z_1$, отображение $t \mapsto f(x_1, t_1, t, z_1)$ есть интегральная кривая для Ξ_{z_1} (в смысле 9.1.7), удовлетворяющая соотношению $f(x_1, t_1, t_1, z_1) = x_1$.

Два отображения

$$f_1\colon X_1 \times I_1 \times I_1 \times Z_1 \to X \text{ и } f_2\colon X_2 \times I_2 \times I_2 \times Z_2 \to X,$$

удовлетворяющие приведенным выше условиям, совпадают в некоторой окрестности точки (x_0, t_0, t_0, z_0).

9.2. Слоения

В этом пункте X означает многообразие класса C^r, где $r \in N_K$. Если не оговорено противное, все рассматриваемые многообразия и морфизмы предполагаются принадлежащими классу C^r.

9.2.1. Пусть S — многообразие и p: $X \to S$ — субмерсия. Для всякой точки $s \in S$ наделим $X_s = p^{-1}(s)$ структурой многообразия,

индуцированной структурой многообразия на X (5.10.5); множество X есть объединение непересекающихся множеств X_s. Обозначим через X_p структуру многообразия на X, получаемую в результате склеивания многообразий X_s для $s \in S$ (5.2.4); это единственная структура многообразия на X, относительно которой подмножества X_s суть открытые подмногообразия. Топологическое пространство X_p есть сумма пространств X_s.

Пусть V — многообразие и f — отображение из V в X. Для того чтобы f было морфизмом из V в X_p, необходимо и достаточно, чтобы f было морфизмом из V в X и чтобы $p \circ f$ было локально постоянно.

9.2.2. *Слоением* на X называется многообразие Y, имеющее то же нижележащее множество, что и X, и удовлетворяющее следующему условию:

(F) Для всякого $x \in X$ существуют такие открытое подмногообразие U в X, содержащее x, многообразие S и субмерсия p: $U \to S$, что многообразие U_p есть открытое подмногообразие в Y.

Говорят также, что пара (X, Y) есть *многообразие со слоением*. Если (X, Y) и (X', Y') — два многообразия со слоением, то *морфизмом* из (X, Y) в (X', Y') называется всякое отображение f: $X \to X'$, являющееся одновременно морфизмом многообразия X в многообразие X' и морфизмом многообразия Y в многообразие Y'.

Пусть (X, Y) — многообразие со слоением. Тождественное отображение $Y \to X$ есть биективная иммерсия. Подмножество U многообразия X называется *листом*, если оно открыто в Y; в этом случае U наделяют топологической структурой и структурой многообразия, индуцированными соответствующими структурами на Y; например, говорят, что U есть *связный лист*, если оно есть связное открытое подмножество в Y. Листы, являющиеся подмногообразиями в X, образуют базис топологии в Y. Коль скоро $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, связные компоненты пространства Y суть листы, называемые *максимальными связными листами* в (X, Y).

9.2.3. Если $s \in N_K$, $s \leqslant r$, то слоением класса C^s на X называется слоение на многообразии класса C^s, лежащем ниже X.

9.2.4. *Примеры*

a) Многообразие X есть слоение на X, называемое *грубым слоением* на X.

b) Если p: $X \to S$ — субмерсия, то X_p есть слоение на X, называемое *слоением на X, определенным субмерсией p*. Слоение на X, определенное тождественным отображением, есть множество X,

наделенное структурой чистого многообразия размерности 0 (5.2.1); оно называется *дискретным слоением* на X.

c) Пусть E — банахово пространство, F — замкнутое векторное подпространство в E, допускающее топологическое дополнение, и p — каноническая проекция $E \to E/F$. Слоение E_p на E называется слоением на E, определенным подпространством F.

d) Пусть Γ — дискретная группа, действующая собственно и свободно на топологическом пространстве X (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 4). Пусть Y — слоение на X, и предположим, что для всякого $s \in \Gamma$ отображение $x \mapsto sx$ есть автоморфизм многообразия со слоением (X, Y). Отношение эквивалентности на X (соотв. Y), классы которого суть орбиты группы Γ, регулярно (5.9.5). Если обозначить через X/Γ (соотв. Y/Γ) соответствующее фактор-многообразие, то пара $(X/\Gamma, Y/\Gamma)$ есть многообразие со слоением, называемое *фактором* пары (X, Y) по группе Γ.

9.2.5. Пусть Y — слоение на X и U — открытое в X подмножество. Тогда U открыто в Y, и U, наделенное структурой многообразия, индуцированной структурой многообразия на Y, есть слоение на U, называемое *слоением, индуцированным* слоением Y.

Более общо, пусть f: $X' \to X$ — такой морфизм, что f и тождественное отображение $Y \to X$ образуют трансверсальную пару (5.11.1). Расслоенное произведение $Y' = X' \times_X Y$ канонически отождествляется со слоением на X', называемым *обратным образом* слоения Y относительно f.

9.2.6. Пусть p: $X \to S$ и p': $X' \to S'$ — две субмерсии, и пусть f — морфизм из X в X'. Для того чтобы f был морфизмом многообразия X_p в $X'_{p'}$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in X$ существовали такие открытая окрестность U точки x в X и морфизм g из $p(U)$ в S', что $g \circ p = p' \circ f$ на U.

9.2.7. Пусть Y — слоение на X. *Расслаивающей картой* на (X, Y) называется такая четверка (U, φ, E, F), что (U, φ, E) — карта на X, F — замкнутое векторное подпространство банахова пространства E, допускающее топологическое дополнение, а φ — изоморфизм слоения на U, индуцированного слоением Y, на слоение на $\varphi(U)$, определенное каноническим отображением из E на E/F. Для всякой точки $x \in X$ существует такая расслаивающая карта (U, φ, E, F) на (X, Y), что $x \in U$. Пусть $n = \dim_x X$, и пусть $m = \dim_x Y$. Если n конечно, то существуют открытая окрестность точки x и такая система координат $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ на X в U, что слоение на U, индуцированное слоением Y, совпадает со слоением, определенным отображением $(\zeta^{m+1}, \ldots, \zeta^n)$ из U в K^{n-m}.

9.2.8. Пусть Y — слоение на X. Когда x пробегает X, пространства $T_x(Y)$ составляют слои некоторого векторного подрасслоения класса C^{r-1} в $T(X)$, которое называется *подрасслоением в* $T(X)$, *касательным к слоению* Y, и обозначается через $T(X, Y)$. Если слоение Y определяется субмерсией $p\colon X \to S$, то $T(X, Y) = \operatorname{Ker} T(p)$ есть относительное касательное расслоение $T(X/S)$ многообразия X над S (8.1.3).

Пусть (X, Y) и (X', Y') — два многообразия со слоением, и пусть f — морфизм из X в X'. Для того чтобы f был морфизмом многообразий со слоением, необходимо и достаточно, чтобы $T(f)$ отображало $T(X, Y)$ в $T(X', Y')$. В частности, пусть $f\colon Z \to X$ — морфизм многообразий; для того чтобы f был морфизмом из Z в Y, необходимо и достаточно, чтобы $T(f)$ отображало $T(Z)$ в $T(X, Y)$. Для того чтобы подмногообразие Z в X было листом в (X, Y), необходимо и достаточно, чтобы

$$T_z(Z) = T_z(X, Y) \text{ для всякого } z \in Z.$$

Пусть Y — слоение на X, и пусть U — лист в Y, допускающий счетный базис открытых множеств. Пусть Z — многообразие и f — отображение из Z в U. Для того чтобы f было морфизмом многообразия Z в многообразие U, необходимо и достаточно, чтобы композиция отображения f и канонической инъекции из U в X была морфизмом многообразий из Z в X. Если X локально компактно и счетно в бесконечности, всякий связный лист в (X, Y) допускает счетный базис открытых множеств (см. *Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 11, n° 7, следствие 2 к теореме 1).

9.2.9. Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть Y — слоение на X. Следующие условия эквивалентны:

a) Существуют такие многообразие S и субмерсия $p\colon X \to S$, что $Y = X_p$.

b) Для всякого $x \in X$ существует подмногообразие S_x в X, обладающее следующими двумя свойствами:

b$_1$) Касательное пространство $T_x(S_x)$ к S_x в x есть топологическое дополнение к $T_x(X, Y)$ в $T_x(X)$.

b$_2$) Всякий связный лист в (X, Y) пересекается с S_x не более чем в одной точке.

Предположим, что эти условия выполнены, и пусть $R\{x, y\}$ — отношение эквивалентности на X «x и y принадлежат одному связному листу»; тогда R есть регулярное (5.9.5) отношение эквивалентности на X, и если p означает каноническую проекцию $X \to X/R$, то $Y = X_p$.

Пример. Возьмем $K = \mathbf{R}$ и $X = \mathbf{R}^2$. Пусть дискретная группа $\Gamma = \mathbf{Z}^2$ действует сдвигами на X. Пусть $m \in \mathbf{R}$ и (X, Y_m) — слоение, определенное субмерсией $p\colon (x_1, x_2) \mapsto x_2 - mx_1$ из X на $\mathbf{R}$.

Положим $X' = X/\Gamma$ и $Y'_m = Y_m/\Gamma$; тогда Y'_m есть слоение на торе X' (см. 9.2.4, пример d)). Если m рационально, существует такая субмерсия p' из X' на $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, что $Y'_m = X'_p$. Если m иррационально, всякий связный максимальный лист в (X', Y'_m) плотен в X' и не существует такой субмерсии p' из X' в многообразие S, что $Y'_m = X'_{p'}$.

9.2.10. Пусть Y — слоение на X и π: $X \to S$ — такой морфизм многообразий, что композиция $Y \to X \xrightarrow{\pi} S$ этальна. Если S'—открытое подмножество в S, то сечение σ: $S' \to X$ отображения π над S' называется *горизонтальным* (по отношению к слоению Y), если оно есть морфизм из S' в Y; это же можно выразить, сказав, что $\sigma(S')$ есть лист в (X, Y) или также что $T(\sigma)$ отображает $T(S')$ в $T(X, Y)$. Для всякого $s_0 \in S$ и для всякого $x_0 \in \pi^{-1}(s_0)$ существует горизонтальное сечение, определенное в некоторой окрестности точки s_0 и принимающее значение x_0 в s_0; два таких сечения совпадают в некоторой окрестности точки s_0.

Более общо, пусть $s_0 \in S$, T — многообразие, f — морфизм из T в подмногообразие $\pi^{-1}(s_0)$ в X и $t_0 \in T$. Существуют тогда открытая окрестность T' (соотв. S') точки t_0 в T (соотв. точки s_0 в S) и морфизм

$$F: S' \times T' \to X,$$

удовлетворяющие следующему условию: для всякого $t \in T'$ отображение $s \mapsto F(s, t)$ есть горизонтальное сечение отображения π над S', принимающее значение $f(t)$ в точке s_0. Два таких отображения F совпадают в окрестности точки (s_0, t_0).

9.3. Интегрируемые подрасслоения

В этом пункте X означает многообразие класса C^r, а F — векторное подрасслоение класса C^s в $T(X)$, где r, s принадлежат N_K, $s \leqslant r - 1$.

9.3.1. Пусть V — многообразие класса C^k ($k \in N_K$, $k \leqslant r$), и пусть f — морфизм класса C^k из V в X. Говорят, что f есть *интеграл* для F, если $T(f)$ отображает $T(V)$ в F.

Подмногообразие Z в X класса C^k называется *интегральным подмногообразием* для F, если инъекция $Z \to X$ есть интеграл для F в указанном выше смысле, т. е. если $T_x(Z) \subset F_x$ для всякого $x \in Z$.

Пусть $x \in X$. Если Z_1 и Z_2 — два интегральных подмногообразия в X, содержащие x, и если $T_x(Z_1) = F_x$, то существует такая окрестность U точки x, что $U \cap Z_2 \subset Z_1$. Если дополнительно $T_x(Z_2) = F_x$, то ростки подмногообразий Z_1 и Z_2 в точке x совпадают.

9.3.2. Говорят, что векторное подрасслоение F *интегрируемо,* если существует такое слоение Y на X класса C^s, что $F = T(X, Y)$ (9.2.8). Такое слоение тогда единственно; оно называется *интегральным слоением* для F. Для того чтобы морфизм $f: V \to X$ класса C^s был интегралом для F, необходимо и достаточно, чтобы f был морфизмом из V в Y.

Пример. Если F имеет ранг 1 в каждой точке, то оно интегрируемо и определяет на X чистое слоение размерности 1. Предположим дополнительно, что $K = \mathbf{R}$, что X отделимо и что F допускает в качестве репера векторное поле ξ, нигде не обращающееся в нуль. Тогда для всякого $x \in X$ максимальный связный лист, содержащий x, есть образ максимальной связной дуги поля ξ с началом в точке x (9.1.3).

9.3.3. (*Критерии интегрируемости.*) Следующие условия эквивалентны:

(i) Векторное подрасслоение F в $T(X)$ интегрируемо.

(ii) Для всякого $x \in X$ существует такое интегральное подмногообразие Z для F класса C^s, что $x \in Z$ и $T_x(Z) = F_x$.

(iii) Каковы бы ни были открытое подмножество U в X и векторные поля ξ и η, принадлежащие $\mathscr{S}_F^s(U)$ (7.4.1), справедливо включение $[\xi, \eta] \in \mathscr{S}_F^{s-1}(U)$.

Пусть $(\xi_i)_{i \in I}$ — такое семейство сечений расслоения F класса C^s, что для всякого $x \in X$ множество $\xi_i(x)$ есть *тотальное* подмножество банахова пространства F_x (*Топ. вект. пр.*, гл. I, § 2, n° 1). Условия (i) — (iii) эквивалентны тогда условию:

(iv) Для всякой пары (i, j) элементов из I и всякого $x \in X$ имеем $[\xi_i, \xi_j](x) \in F_x$.

Когда I конечно и семейство (ξ_i) является *репером* расслоения F, предыдущие условия эквивалентны также условию

(v) существует семейство $(c_{ij}^k)_{(i,j,k) \in I \times I \times I}$ таких функций на X со значениями в K, что $[\xi_i, \xi_j] = \sum_k c_{ij}^k \xi_k$, каковы бы ни были i, j из I.

(Если это так, то c_{ij}^k — функции класса C^{s-1}.)

9.3.4. Пусть $s' \in N_K$, где $s' \leqslant s$, и F' — векторное расслоение класса $C^{s'}$, полученное из F ослаблением структуры (8.7.1). Для того чтобы F было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы таковым было F'. В этом случае интегральное слоение для F' получается из соответствующего слоения для F ослаблением структуры.

9.3.5. Пусть E — банахово пространство и p — целое число $\geqslant 0$. Для всякого $x \in X$ обозначим через $N(p, E)_x$ векторное подпространство в $\mathrm{Alt}^p(T_x(X); E)$, образованное такими элементами u, что $u(v_1, \ldots, v_p) = 0$ для $v_1, \ldots, v_p$ из F_x. Пространства $N(p, E)_x$ при $x \in X$ суть слои векторного подрасслоения в $\mathrm{Alt}^p(T(X); E)$ класса C^s. Обозначим его через $N(p, E)$. Если подрасслоение F интегрируемо, то

(vi) для всякого открытого подмножества U в X и всякой формы $\omega \in \mathscr{S}^s_{N(p,E)}(U)$ имеет место включение $d\omega \in \mathscr{S}^{s-1}_{N(p+1,E)}(U)$.

Обратно, если (vi) выполнено для $p = 1$ и всякого банахова пространства E, то подрасслоение F интегрируемо; когда $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, достаточно даже проверить (vi) для $p = 1$ и $E = K$.

Предположим, что дуальное к $T(X)/F$ расслоение допускает репер $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Интегрируемость подрасслоения F эквивалентна тогда следующему условию:

(vii) $$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Если, кроме того, существует такое векторное подрасслоение G в $T(X)$ класса C^s, что $T(X)$ есть прямая сумма подрасслоений F и G, то условие (vii) эквивалентно условию

(viii) существуют такие дифференциальные формы α_i^j (i, j принадлежат I) степени 1 и класса C^{s-1} на X, что $d\omega_i = \sum\limits_j \alpha_i^j \wedge \omega_j$ для всякого $i \in I$.

9.3.6. Пусть L — банахово пространство, и пусть ω — дифференциальная форма на X степени 1 и класса C^s со значениями в L. Примем следующие предположения:

a) значение ω_x формы ω в любой точке $x \in X$ есть сюръективный гомоморфизм из $T_x(X)$ в L и ядро гомоморфизма ω_x есть F_x;

b) существует такое векторное подрасслоение G в $T(X)$, что $T(X)$ есть прямая сумма подрасслоений F и G.

Интегрируемость подрасслоения F эквивалентна тогда условию

(ix) существует такая дифференциальная форма α на X степени 1 и со значениями в $\mathrm{End}(L)$, что $d\omega = \alpha \wedge \omega$, где внешнее произведение определяется каноническим спариванием $\mathrm{End}(L) \times L \to L$ (7.8.2 и 8.3.2).

9.3.7. (*Уравнения в полных дифференциалах.*) Предполагается, что X есть произведение двух многообразий A и B класса C^r; через $p_1 \colon X \to A$ и $p_2 \colon X \to B$ обозначаются проекции. Пусть f —

морфизм класса C^s из $p_1^* T(A)$ в $p_2^* T(B)$. Графики отображений $f_{(a,b)}$: $T_a(A) \to T_b(B)$ суть слои векторного подрасслоения в $T(X)$ класса C^s; обозначим его через F^f.

Пусть A' — открытое подмножество в A, и пусть $\varphi: A' \to B$ — морфизм класса C^k ($k \in N_K$, $k \leqslant r$). Говорят, что φ есть *интеграл* для f, если для всякого $a \in A'$ имеем $T_a(\varphi) = f_{a,\varphi(a)}$; это эквивалентно тому, что отображение $a \mapsto (a, \varphi(a))$ из A' в X есть *интеграл* для F^f (9.3.1). Такое отображение принадлежит классу C^{s+1}. Если φ_1 и φ_2 — два интеграла для f, принимающие одинаковые значения в некоторой точке $a \in A$, то они совпадают в некоторой окрестности точки a.

Более общо, пусть Z — многообразие класса C^k, A' — открытое подмножество в A, $a \in A'$ и Φ_1, Φ_2 — морфизмы класса C^k из $Z \times A'$ в B. Предположим, что Φ_1 и Φ_2 совпадают на $Z \times \{a\}$ и что для всякого $z \in Z$ морфизмы

$$a \mapsto \Phi_1(z, a) \text{ и } a \mapsto \Phi_2(z, a)$$

суть интегралы для f. Тогда Φ_1 и Φ_2 совпадают в некоторой окрестности множества $Z \times \{a\}$.

Предположим, что F^f *интегрируемо*. Пусть Z — многообразие класса C^k ($k \in N_K$, $k \leqslant s$), (z_0, a_0) — точка в $Z \times A$ и ρ — морфизм класса C^k из Z в B. Существуют такие открытая окрестность $Z' \times A'$ точки (z_0, a_0) в $Z \times A$ и морфизм Φ: $Z' \times A' \to B$ класса C^k, что для всякого $z \in Z'$ отображение $a \mapsto \Phi(z, a)$ из A' в B имеет f касательным отображением и принимает значение $\rho(z)$ в точке a_0.

9.3.8. Сохраним предположения и обозначения из 9.3.7 и предположим, что A (соотв. B) есть открытое подмногообразие в банаховом пространстве E (соотв. M). Отображение f отождествляется тогда с морфизмом класса C^s из $X = A \times B$ в банахово пространство $\mathcal{L}(E; M)$. Обозначим через $D_1 f$ (соотв. $D_2 f$) первую (соотв. вторую) частную производную морфизма f (1.6.2); это морфизм класса C^{s-1} из X в $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; M))$ (соотв. в $\mathcal{L}(M; \mathcal{L}(E; M))$) — пространство, которое очевидным образом отождествляется с $\mathcal{L}_2(E; M)$ (соотв. с $\mathcal{L}(M, E; M)$). Для того чтобы F было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in X$ билинейное отображение

$$\Delta_x: (h_1, h_2) \mapsto D_1 f(x)(h_1, h_2) + D_2 f(x)(f(x) h_1, h_2)$$

из $E \times E$ в M было симметрично. При этом условии если φ есть интеграл для f, определенный в открытом подмножестве A' многообразия A, то вторая частная производная отображения φ в точке a из A' есть $\Delta_{(a,\varphi(a))}$.

Если $E = K^n$ и через $(x^1, \ldots, x^n)$ обозначены координатные функции на K^n, то отображение f определяется семейством $(f_1, \ldots, f_n)$ отображений из $A \times B$ в M, и условие интегрируемости записывается в таком виде:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} + (D_2 f_i) \cdot f_j = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} + (D_2 f_j) \cdot f_i,$$

каковы бы ни были целые числа i, j из $[1, n]$. Отображение φ открытого в A подмножества A' в B есть интеграл для f тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = f_i(x, \varphi(x)) \text{ для всякого } x \in A' \text{ и всякого } i \in [1, n],$$

другими словами, когда

$$d\varphi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x, \varphi(x))\, dx^i.$$

9.4. *Интегрируемые расслоения в характеристике $p \neq 0$*

В этом пункте предполагается, что характеристика поля K равна $p \neq 0$. Через X обозначается K-аналитическое локально конечномерное многообразие.

9.4.1. (*p-е степени*.) Пусть ξ — векторное поле на открытом подмножестве U в X. Существует одно и только одно такое векторное поле ξ^p на U, что

$$D_{\xi^p}(f) = (D_\xi)^p(f) = \underbrace{D_\xi(D_\xi(\ldots(D_\xi}_{p \text{ раз}}(f))\ldots)) \tag{1}$$

для всякой аналитической функции f, определенной на открытом подмножестве в U.

Если φ — аналитическая функция на U, то

$$(\varphi\xi)^p = \varphi^p \xi^p + (D_{\varphi\xi})^{p-1}(\varphi) \cdot \xi, \tag{2}$$

и если η — векторное поле на U, то

$$[\xi^p, \eta] = \operatorname{ad}(\xi)^p(\eta) = [\xi, [\xi, \ldots, [\xi, \eta] \ldots]]. \tag{3}$$

9.4.2. (*Тождество Джекобсона*.) Пусть L — свободная $\mathbf{F}_p$-алгебра Ли (*Группы и алгебры Ли*, гл. II, § 2, n° 2) над множеством $\{x, y\}$ из двух элементов. Существует один и только один такой элемент $\Lambda_p(x, y)$ в L, что

$$(x + y)^p = x^p + y^p + \Lambda_p(x, y) \tag{4}$$

в обертывающей алгебре алгебры Ли L. Примеры:

$$\Lambda_2(x, y) = [x, y]; \quad \Lambda_3(x, y) = [x, [x, y]] - [y, [x, y]].$$

Если ξ и η — векторные поля на X, то

$$(\xi + \eta)^p = \xi^p + \eta^p + \Lambda_p(\xi, \eta). \tag{5}$$

9.4.3. *Пример*. Возьмем $X = K$ (соотв. K^*) и обозначим через x каноническое отображение $X \to K$. Пусть ξ (соотв. η) — векторное поле $\partial/\partial x$ (соотв. $x \cdot \partial/\partial x$); оно инвариантно относительно сдвигов аддитивной (соотв. мультипликативной) группы X. Имеем

$$\xi^p = 0 \text{ и } \eta^p = \eta. \tag{6}$$

9.4.4. (*Интегрируемые расслоения.*) Пусть F — векторное подрасслоение в $T(X)$. Говорят, что F *интегрируемо*, если для всякого $x \in X$ существуют такие система координат $(\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ на X в x и целое число $m \leqslant n$, что $(\partial/\partial\zeta^1, \ldots, \partial/\partial\zeta^m)$ есть репер расслоения F в окрестности точки x.

Для того чтобы F было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

Для всякого открытого подмножества U в X пространство $\mathscr{S}^\omega_F(U)$ есть подалгебра Ли в $\mathscr{S}^\omega_{T(X)}(U)$, устойчивая относительно операции $\xi \mapsto \xi^p$.

§ 10. Меры, определяемые дифференциальными формами

В этом параграфе предполагается, что K *локально компактно*. Начиная с n° 10.2, мы предполагаем, что $K = \mathbf{R}$. В n°n° 10.1 и 10.4 все рассматриваемые многообразия предполагаются локально конечномерными; если они отделимы, то они локально компактны.

10.1. *Мера, являющаяся модулем дифференциальной формы*

Обозначения. Через μ обозначается *мера Хаара* (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 2) на аддитивной группе поля K. Через $\mu^{\otimes n}$ обозначается мера $\mu \otimes \ldots \otimes \mu$ на K^n и через $\mu_U^{\otimes n}$ — ее ограничение на открытое подмножество U в K^n. Для $a \in K$ через mod (a) обозначается *модуль* элемента a (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 10, и *Комм. алг.*, гл. VI, § 9, n° 1). Если $K = \mathbf{R}$, то mod $(a) = |a|$; если $K = \mathbf{C}$, то mod $(a) = |a|^2$; если K ультраметрично, то mod $(a) = q^{-v(a)}$, где q означает число элементов поля классов вычетов поля K и v — нормированное дискретное нормирование поля K (*Комм. алг.*, гл. VI, § 9, n° 1, предл. I).

10.1.1. Пусть U и V — открытые подмножества в K^n и $f\colon U \to V$ — отображение класса C^r, где $r \in N_K$. Пусть $x \in U$; *якобианом* отображения f в x, который обозначается через $\mathrm{Jac}_x(f)$, называется определитель линейного отображения $Df(x)$, являющегося производной отображения f в x. Через $\mathrm{Jac}(f)$ обозначается функция $x \mapsto \mathrm{Jac}_x(f)$; функция mod $(\mathrm{Jac}(f))$ является непрерывной функцией на U с положительными вещественными значениями.

10.1.2. (*Замена переменного в интегралах.*) Сохраняя предположения из 10.1.1, предположим, что f есть изоморфизм класса C^r многообразия U на многообразие V. Тогда *образ меры* mod $(\mathrm{Jac}(f)) \cdot \mu_U^{\otimes n}$ *относительно f есть* $\mu_V^{\otimes n}$; для всякой непрерывной функции с компактным носителем $\varphi\colon V \to \mathbf{C}$ имеем

$$(1) \qquad \int_V \varphi(y)\, \mu^{\otimes n}(y) = \int_U \varphi(f(x)) \cdot \mathrm{mod}\,(\mathrm{Jac}_x(f))\, \mu^{\otimes n}(x).$$

10.1.3. Пусть X — многообразие класса C^r и A — подмножество в X. Говорят, что A *локально пренебрежимо*, если для всякой карты (U, φ, K^n) на многообразии X множество $\varphi(A \cap U)$ является $\mu^{\otimes n}$-пренебрежимым (*Интегр.*, гл. IV, § 2, n° 2); это условие не зависит от выбора μ, и достаточно проверить его для некоторого семейства карт, области определения которых покрывают A. Всякое множество, содержащееся в объединении счетного семейства локально пренебрежимых множеств, локально пренебрежимо.

Примеры.

a) Всякое подмногообразие в X, имеющее коразмерность $\geqslant 1$ в каждой точке (т. е. имеющее пустую внутренность), локально пренебрежимо.

b) Пусть g — функция класса C^r на X, и пусть A_g — множество таких точек $x \in X$, что $g(x) = 0$; предположим, что внутренность множества A_g пуста и что $r = \omega$; тогда A_g локально пренебрежимо.

c) Пусть $f: Y \to X$ — морфизм многообразий класса C^r, причем многообразие Y есть объединение счетного множества компактов. Предполагается, что $\dim_y Y \leqslant \dim_{f(y)} X$ для всякого $y \in Y$. Образ при морфизме f всякого локально пренебрежимого подмножества в Y есть локально пренебрежимое подмножество в X. То же справедливо для образа при морфизме f множества точек, в которых f не этален (*первая теорема Сарда*); в частности, если $\dim_y Y < \dim_{f(y)} X$ для всякого $y \in Y$, то $f(Y)$ есть локально пренебрежимое подмножество в X.

d) Предположим, что *K имеет характеристику нуль*. Пусть $f: Y \to X$ — морфизм многообразий класса C^r ($r \in N_K$, $r \geqslant \infty$), причем Y есть объединение счетного множества компактов. Пусть C — множество точек в Y, в которых f не является субмерсией (*критические точки*). Тогда $f(C)$ есть локально пренебрежимое подмножество в X (*вторая теорема Сарда*) [1]).

10.1.4. Пусть X — *паракомпактное* многообразие класса C^r. На X существует один и только один такой класс M эквивалентных мер (*Интегр.*, гл. V, § 5, n° 6), что, какова бы ни была мера $\nu \in M$ и какова бы ни была карта $c = (U, \varphi, K^n)$ на X, образ при φ ограничения меры ν на U эквивалентен мере $\mu^{\otimes n}_{\varphi(U)}$. Говорят, что M есть *канонический класс* мер на X. Для того чтобы подмножество A в X было локально пренебрежимо (10.1.3), необходимо и достаточно, чтобы оно было локально пренебрежимо (*Интегр.*, гл. IV, § 2, n° 2) для некоторой (соотв. всякой) меры $\nu \in M$.

[1]) Когда $K = \mathbf{R}$, достаточно предполагать, что $r > \sup\limits_{y \in Y} (\dim_{f(y)} X - \dim_y Y)$; см., например, A. Sard, *Bull. Am. Math. Soc.*, **XLVIII** (1943), 883—890.

Если $K = \mathbf{R}$ и $r \neq \omega$ (соотв. $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и $r = \omega$, соотв. K ультраметрично), то существует такая мера $\nu \in M$, что для всякой карты $c = (U, \varphi, K^n)$ на X плотность меры $\varphi(\nu_U)$ по отношению к $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ всюду > 0 и принадлежит классу C^{r-1} (соотв. принадлежит классу C^∞, соотв. локально постоянна). Если ν и ν' — две такие меры, то плотность меры ν' по отношению к ν всюду > 0 и принадлежит классу C^{r-1} (соотв. принадлежит классу C^∞, соотв. локально постоянна).

10.1.5. Пусть X — многообразие класса C^r, пусть $T'(X)$ — кокасательный пучок на X (8.2.2), и положим $\Omega = \det(T'(X))$ (7.9.9). Векторное расслоение Ω имеет ранг 1 в каждой точке; если X — чистое многообразие размерности n, оно отождествляется с векторным расслоением $\mathrm{Alt}^n(T(X); K_X)$. Пусть ω — сечение расслоения Ω над X; допуская вольность речи, говорят, что ω есть *дифференциальная форма максимальной степени* на X. Пусть $c = (U, \varphi, K^n)$ — карта на X; обозначим через $u^1, \ldots, u^n$ координатные функции на K^n. Существует одна и только одна такая функция f_c на $\varphi(U)$, что $\omega \mid U = \varphi^*(f_c \cdot du^1 \wedge \ldots \wedge du^n)$. Говорят, что ω имеет *локально интегрируемый модуль*, если для всякой карты $c = (U, \varphi, K^n)$ на X вещественная функция $\mathrm{mod}(f_c) : \varphi(U) \to \mathbf{R}$ локально интегрируема относительно $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ (*Интегр.*, гл. IV, § 4, n° 1[1])); достаточно проверить это свойство для карт некоторого атласа многообразия X. Если ω *непрерывна* и, в частности, если ω принадлежит классу C^s, где $s \in N_K$, $s \leqslant r - 1$, то ω имеет локально интегрируемый модуль.

10.1.6. (*Положительная мера, определяемая дифференциальной формой максимальной степени.*) Сохраним обозначения из 10.1.5 и предположим дополнительно, что X *отделимо* и что ω имеет *локально интегрируемый модуль*. Если $c = (U, \varphi, K^n)$ — карта на X, обозначим через ν_c меру на $\varphi(U)$, являющуюся произведением меры $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ на функцию $\mathrm{mod}(f_c)$ (*Интегр.*, гл. V, § 5, n° 2, определение 2), и пусть α_c — образ меры ν_c относительно φ^{-1}. На X существует одна и только одна такая мера α, что для всякой карты $c = (U, \varphi, K^n)$ на X ограничение меры α на U равно α_c. Говорят, что мера α есть *модуль* формы ω, и обозначают ее через $\mathrm{mod}(\omega)_\mu$. Это положительная мера. Когда $K = \mathbf{R}$ и μ — мера Лебега, вместо $\mathrm{mod}(\omega)_\mu$ пишут $|\omega|$.

Если X — чистое многообразие размерности n и если a — вещественное число > 0, то $\mathrm{mod}(\omega)_{a\mu} = a^n \mathrm{mod}(\omega)_\mu$.

---

[1]) См. также *Интегр.*, гл. V, § 5, n° 1.— *Прим. перев.*

Пусть A — подмножество в X. Для того чтобы A было локально пренебрежимым (10.1.3), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого в X подмножества U и всякой дифференциальной формы ω максимальной степени на U, имеющей локально интегрируемый модуль, множество $A \cap U$ было локально пренебрежимым для меры $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$.

Предположим дополнительно, что X паракомпактно, и пусть ν — мера на X, принадлежащая каноническому классу эквивалентности M (10.1.4). Мера $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$ есть мера с базисом ν (*Интегр.*, гл. V, § 5, n° 2, определение 2). Для того чтобы она принадлежала M, необходимо и достаточно, чтобы множество таких $x \in X$, что $\omega(x) = 0$, было локально пренебрежимым.

10.1.7. *Пример*. Пусть G — группа Ли над K конечной размерности n и ω — дифференциальная форма степени n на G, инвариантная относительно левых сдвигов и ненулевая. Соответствующая мера $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$ есть тогда левая *мера Хаара* на локально компактной группе G.

Если G — мультипликативная группа K^*, в качестве ω можно взять форму dx/x, и тогда $\operatorname{mod}(\omega)_\mu = (\operatorname{mod})^{-1}\cdot\mu$; см. *Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 10, предложение 14.

10.2. Ориентации

Напомним, что в этом и последующих пунктах предполагается, что $K = \mathbf{R}$.

10.2.1. (*Ориентация вещественного векторного пространства.*) Пусть E — вещественное векторное пространство конечной размерности n. Через $\operatorname{Or}(E)$ обозначается множество ориентаций пространства E (*Alg.*, chap. VI, § 2, n° 7); элементы из $\operatorname{Or}(E)$ суть две замкнутые полупрямые векторного пространства $\det(E) = \bigwedge^n E$. Если $\xi \in \operatorname{Or}(E)$, то другой элемент из $\operatorname{Or}(E)$ называется ориентацией, *противоположной* к ξ, и обозначается через $-\xi$.

Пусть $0 \to E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \to 0$ — точная последовательность (вещественных) векторных пространств конечной размерности; положим $p' = \dim E'$, $p'' = \dim E''$, и пусть ξ' (соотв. ξ'') — ориентация пространства E' (соотв. E''). Обозначим через $\xi'\xi''$ (соотв. $\xi''\xi'$) ориентацию пространства E, содержащую ненулевой $(p' + p'')$-вектор $u' \wedge u''$ (соотв. $u'' \wedge u'$), где u' есть образ относительно $\bigwedge^{p'}\alpha$ некоторого p'-вектора в E', принадлежащего ξ', а u'' есть p''-вектор в E, образ которого относительно $\bigwedge^{p''}\beta$ принадлежит ξ'' (*Alg.*, chap. VI, § 2, n° 7). Если $E = E' \times E''$, причем α и β суть

канонические отображения, говорят, что $\xi'\xi''$ есть *произведение* ориентации ξ' и ориентации ξ''.

10.2.2. (*Пространство ориентаций.*) Пусть B — топологическое пространство и M — вещественное векторное расслоение с базой B (в топологическом смысле — см. § 6, примечание на стр. 70), имеющее конечный ранг (7.1.6). Пусть Or_M — множество, являющееся суммой множеств $\mathrm{Or}\,(M_b)$ для $b \in B$, и пусть π: $\mathrm{Or}_M \to B$ — такое отображение, что $\pi\,(\mathrm{Or}\,(M_b)) = \{b\}$. На Or_M существует одна и только одна такая структура топологического пространства, что:

a) π непрерывно.

b) Если s — непрерывное сечение расслоения $\det\,(M)$ над открытым в B подмножеством U, нигде не обращающееся в нуль, и если $\xi\,(s\,(b))$ — ориентация пространства M_b, определяемая элементом $s\,(b)$ из $\det\,(M_b)$, то отображение $b \mapsto \xi\,(s\,(b))$ из U в Or_M непрерывно.

Пространство Or_M называется *пространством ориентаций расслоения* M. Группа $\{\pm 1\}$ действует на Or_M по формуле $\xi \mapsto \pm\,\xi$ (10.2.1). Четверка $(\mathrm{Or}_M, \{\pm 1\}, B, \pi)$ есть *главное расслоение* (6. 2.1) с базой B и структурной группой $\{\pm 1\}$; проекция $\pi : \mathrm{Or}_M \to B$ определяет изоморфизм из $\mathrm{Or}_M / \{\pm 1\}$ на B; см. n° 6.2.

Когда B наделено структурой многообразия, Or_M наделяют структурой многообразия, являющейся обратным образом относительно π структуры многообразия на B (5.8.1); определенное выше расслоение есть тогда расслоение многообразий, и морфизм π этален.

10.2.3. Сохраним предположения из 10.2.2. *Ориентацией* векторного расслоения M называется непрерывное сечение ξ: $B \to \mathrm{Or}_M$ проекции π: $\mathrm{Or}_M \to B$. Говорят, что M *ориентируемо,* если оно обладает ориентацией; к этому же сводится утверждение, что расслоение Or_M тривиализуемо, т. е. изоморфно $B \times \{\pm 1\}$. Если B связно и непусто, всякое ориентируемое векторное расслоение имеет две противоположные друг другу ориентации.

Когда M сводится к 0, расслоение $\det\,(M)$ есть тривиальное расслоение $\mathbf{R}_B$, и Or_M отождествляется с $\mathrm{Or}\,(\mathbf{R}) \times B$; расслоение M обладает канонической ориентацией, отвечающей положительной полупрямой в $\mathbf{R}$.

10.2.4. (*Ориентация многообразия.*) Пусть X — локально конечномерное многообразие над $\mathbf{R}$ класса C^r, и пусть $T\,(X)$ — его касательное расслоение. Через $\tilde{X}$ обозначается многообразие $\mathrm{Or}_{T(X)}$; группа $\{\pm 1\}$ действует собственно и свободно на $\tilde{X}$, и $\tilde{X}/\{\pm 1\}$

отождествляется с X; слои проекции $\pi : \tilde{X} \to X$ суть множества $\mathrm{Or}\,(T_x(X))$, где $x \in X$. *Ориентацией* многообразия X называется ориентация расслоения $T\,(X)$, другими словами, непрерывное сечение расслоения $\tilde{X}$; такое сечение принадлежит классу C^r. Говорят, что X *ориентируемо,* если оно обладает ориентацией. Всякое многообразие размерности нуль ориентируемо и обладает канонической ориентацией (10.2.3).

Пусть $\xi \in \tilde{X}$ и $x = \pi\,(\xi)$—его образ в X; отображение $T_\xi(\pi)\colon T_\xi(\tilde{X}) \to T_x\,(X)$ есть изоморфизм; оно позволяет отождествить ξ с элементом $\tilde{\xi}$ из $\mathrm{Or}\,(T_\xi(\tilde{X}))$. Отображение $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ есть *ориентация* многобризия $\tilde{X}$, называемая канонической; в частности, $\tilde{X}$ ориентируемо.

10.2.5. (*Ориентация морфизма.*) Пусть X и Y — два локально конечномерных многообразия, и пусть $f\colon X \to Y$—морфизм многообразий. *Ориентацией* морфизма f называется морфизм $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

и согласованный с действием группы $\{\pm 1\}$.

Если $\tilde{f}$ — ориентация морфизма f и если η — ориентация многообразия Y, то существует одна и только одна такая ориентация ξ многообразия X, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \xi \uparrow & & \eta \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

коммутативна. Говорят, что ориентация ξ ассоциирована с η посредством $\tilde{f}$.

Примеры

a) Если Y сводится к точке, то задание ориентации морфизма f эквивалентно заданию ориентации многообразия X.

b) Предположим, что f этален. Для всякого $x \in X$ отображение $T_x\,(f)$ есть изоморфизм из $T_x\,(X)$ на $T_{f(x)}\,(Y)$ и определяет (посредством переноса структуры) биекцию

$$\tilde{f}_x\colon \mathrm{Or}\,(T_x\,(X)) \to \mathrm{Or}\,(T_{f(x)}\,(Y)).$$

Семейство отображений $\tilde{f}_x$ определяет ориентацию $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$ морфизма f, называемую канонической.

c) Более общо, предположим, что f — *субмерсия,* и пусть α — ориентация расслоения $T(X/Y)$ (8.1.3). Пусть $x \in X$ и ξ — ориентация пространства $T_x(X)$. Положим $y = f(x)$; имеет место точная последовательность (8.1.3)

$$0 \to T_x(X/Y) \to T_x(X) \xrightarrow{T_x(f)} T_y(Y) \to 0,$$

и, стало быть, существует одна и только одна такая ориентация $\tilde{f}_\alpha(\xi)$ пространства $T_y(Y)$, что $\xi = \tilde{f}_\alpha(\xi)\,\alpha(x)$ (10.2.1). Отображение $\tilde{f}_\alpha$: $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ есть ориентация морфизма f; говорят, что она ассоциирована с α. Отображение $\alpha \mapsto \tilde{f}_\alpha$ есть биекция множества ориентаций расслоения $T(X/Y)$ на множество ориентации морфизма f.

d) Если f: $X \to Y$ — иммерсия, то ориентации морфизма f соответствуют ориентациям нормального расслоения к f.

10.2.6. (*Ориентация произведения.*) Пусть X_1 (соотв. X_2) — локально конечномерное многообразие и ξ_1 (соотв. ξ_2) — ориентация многообразия X_1 (соотв. X_2). Пусть $X = X_1 \times X_2$. Отображение $(x_1, x_2) \mapsto \xi_1(x_1)\,\xi_2(x_2)$ (10.2.1) есть ориентация многообразия $X_1 \times X_2$, называемая *произведением* ориентаций ξ_1 и ξ_2 и обозначаемая через $\xi_1\xi_2$ или $\xi_1 \otimes \xi_2$.

Предположим, что X_i $(i = 1, 2)$ — чистое многообразие размерности n_i. Канонический изоморфизм $X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ преобразует $\xi_1 \otimes \xi_2$ в $\xi_2 \otimes \xi_1$ (соотв. в $-\xi_2 \otimes \xi_1$), если одно из чисел n_i четно (соотв. если n_1 и n_2 нечетны).

10.2.7. (*Комплексный случай.*) Пусть F — комплексное векторное пространство конечной размерности и $F_{\mathbf{R}}$ — нижележащее вещественное пространство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — базис в F; тогда $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_m, ie_m\}$ есть базис в $F_{\mathbf{R}}$, и ориентация пространства $F_{\mathbf{R}}$, определяемая $2m$-вектором

$$e_1 \wedge ie_1 \wedge e_2 \wedge ie_2 \wedge \ldots \wedge e_m \wedge ie_m,$$

не зависит от выбора базиса $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в F; говорят, что это *ориентация пространства $F_{\mathbf{R}}$, определяемая данной комплексной структурой.* Если F есть прямая сумма двух подпространств G и H, то ориентация пространства $F_{\mathbf{R}} = G_{\mathbf{R}} \oplus H_{\mathbf{R}}$ есть произведение ориентаций пространств $G_{\mathbf{R}}$ и $H_{\mathbf{R}}$.

Пусть X — вещественное локально конечномерное многообразие, наделенное почти комплексной структурой (8.8.3). Для всякого $x \in X$ пусть $\xi(x)$ — ориентация пространства $T_x(X)$, определяемая его комплексной структурой. Отображение $x \mapsto \xi(x)$ есть ориентация многообразия X; говорят, что она определена почти комплексной структурой. В частности, мы наделяем вещественно-

аналитическое многообразие X, лежащее ниже локально конечномерного комплексно-аналитического многообразия X^0, ориентацией, определяемой ассоциированной почти комплексной структурой (8.8.6). Если заменить данную структуру комплексно-аналитического многообразия на X ее сопряженной (5.4.12.b)), эта ориентация умножится на функцию $x \mapsto (-1)^{\dim_x X^0}$.

10.2.8. *Примеры*

a) Пусть E — конечномерное вещественное векторное пространство. Вещественно-аналитическое многообразие, определенное пространством E (5.2.2), ориентируемо. Точнее, отображение $\xi \mapsto \xi(0)$ есть биекция множества ориентаций этого многообразия на $\mathrm{Or}(E)$.

В частности, многообразие $\mathbf{R}^n$ имеет каноническую ориентацию ξ^n, определяемую полупрямой $\mathbf{R}_+ e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ в $\mathrm{Or}(\mathbf{R}^n)$.

b) Пусть X — *сфера* с центром в 0 и радиуса >0 в $\mathbf{R}^n$; это подмногообразие в $\mathbf{R}^n$. Для всякого $x \in X$ пространство $T_x(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ есть прямая сумма прямой $\mathbf{R}x$ и гиперплоскости $T_x(X)$. Пусть η_x — ориентация $\mathbf{R}_+ x$ прямой $\mathbf{R}x$ («внешняя нормаль») и ξ_x — единственная такая ориентация пространства $T_x(X)$, что произведение ориентаций η_x и ξ_x есть ориентация ξ^n пространства $\mathbf{R}^n$. Отображение $x \mapsto \xi_x$ есть ориентация многообразия X, называемая канонической.

c) Пусть X — связное многообразие и G — дискретная группа, собственно и свободно действующая на X. Для того чтобы X/G было ориентируемо, необходимо и достаточно, чтобы X было ориентируемо и чтобы действие группы G на множестве ориентаций многообразия X было тривиальным.

d) *Вещественное проективное пространство* $P_{n-1}(\mathbf{R})$ отождествляется с фактором сферы S_{n-1} по группе $\{\pm 1\}$, действующей по формуле $x \mapsto \pm x$; оно ориентируемо, если n четно, и не ориентируемо, если n нечетно.

e) Всякий фактор группы Ли по связной подгруппе Ли ориентируем.

10.3. M-скрученные дифференциальные формы

10.3.1. Пусть X — вещественное многообразие класса C^r и M — векторное расслоение конечного ранга с базой X и класса C^k, где $0 \leqslant k \leqslant r$. Пусть $\lambda_M = (\mathrm{Or}_M, \{\pm 1\}, X, \pi)$ — главное расслоение, ассоциированное с многообразием ориентаций расслоения M (10.2.2). Заставим структурную группу $\{\pm 1\}$ действовать на $\mathbf{R}$ умножением. Через $\widetilde{\mathbf{R}}_M$ обозначается расслоенное пространство, ассоциированное с λ_M, со слоем типа $\mathbf{R}$ (наделенным определенным выше законом действия) (6.5.1); оно наделено (7.10.2) структурой

векторного расслоения ранга 1 с базой X и класса C^k и называется *расслоением M-скрученных скаляров.*

10.3.2. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Or}_M \times \mathbf{R} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \tilde{\mathbf{R}}_M \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Or}_M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

где p означает каноническую проекцию из $\tilde{\mathbf{R}}_M$ на X, ρ — реперное отображение (6.5.1) для $\tilde{\mathbf{R}}_M$ и $\varphi(\xi) = \rho(\xi, 1)$ для $\xi \in \mathrm{Or}_M$. В частности, обратный образ расслоения $\tilde{\mathbf{R}}_M$ относительно π отождествляется с тривиальным расслоением $\mathrm{Or}_M \times \mathbf{R}$. Точно так же отождествляется элемент ξ из Or_M со своим образом в $\tilde{\mathbf{R}}_M$ при φ; при этом соглашении $\rho(\xi, a) = a\xi$ для всякого $(\xi, a) \in \mathrm{Or}_M \times \mathbf{R}$; тогда $a\xi = b\eta$, если и только если существует такой элемент $e \in \{\pm 1\}$, что $b = ea$ и $\eta = e\xi$. *Ориентация* ξ расслоения M определяет тем самым сечение $x \mapsto \xi(x)$ расслоения $\tilde{\mathbf{R}}_M$.

Существует один и только один такой изоморфизм j из $\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes \tilde{\mathbf{R}}_M$ на тривиальное расслоение $\mathbf{R}_X = X \times \mathbf{R}$, что $f(\xi \otimes \xi) = (\pi(\xi), 1)$ для всякого $\xi \in \mathrm{Or}_M$; это позволяет отождествить векторное расслоение $\tilde{\mathbf{R}}_M$ с дуальным к нему расслоением.

10.3.3. Пусть дополнительно F — векторное расслоение с базой X и класса C^{r-1}. Дифференциальная форма на X со значениями в $\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes F$ называется *M-скрученной дифференциальной формой со значениями в F.* Такая форма степени p есть сечение расслоения $\mathrm{Alt}^p(T(X); \tilde{\mathbf{R}}_M \otimes F)$, которое очевидным образом отождествляют с $\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes \mathrm{Alt}^p(T(X); F)$. Если F — тривиальное расслоение, определяемое банаховым пространством E, говорят просто о M-скрученной форме со значениями в E; если $E = \mathbf{C}$ (соотв. $\mathbf{R}$), говорят о M-скрученной комплексной форме (соотв. M-скрученной вещественной форме, или M-скрученной форме).

Пусть ω есть M-скрученная форма степени p со значениями в F. То обстоятельство, что π: $\mathrm{Or}_M \to X$ этально и что $\pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_M) = \mathrm{Or}_M \times \mathbf{R}$, позволяет отождествить $\pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_M \times \mathrm{Alt}^p(T(X); F))$ с $\mathrm{Alt}^p(T(\mathrm{Or}_M); \pi^*(F))$, и ω определяет сечение $\tilde{\omega}$ расслоения $\mathrm{Alt}^p(T(\mathrm{Or}_M); \pi^*(F))$ (7.4.3); другими словами, ω определяет дифференциальную форму степени p на Or_M со значениями в $\pi^*(F)$. Таким

путем получаем биекцию пространства M-скрученных форм степени p на X со значениями в F на пространство таких форм $\tilde{\omega}$ степени p на Or_M со значениями в $\pi^*(F)$, что

$$\tilde{\omega}(-\xi) = -\tilde{\omega}(\xi) \text{ для всякого } \xi \in \mathrm{Or}_M.$$

Если M наделено *ориентацией* ξ, отображение $\omega \mapsto \xi \otimes \omega$ позволяет отождествить сечения расслоения $\mathrm{Alt}^p(T(X);\ F)$ (другими словами, обычные дифференциальные формы степени p) с M-скрученными формами степени p со значениями в F.

10.3.4. Пусть ω есть M-скрученная дифференциальная форма степени p на X со значениями в банаховом пространстве E, принадлежащая классу C^s $(1 \leqslant s \leqslant \inf(k, r-1))$. На X существует одна и только одна такая M-скрученная дифференциальная форма $d\omega$ степени $p+1$ со значениями в E, что каковы бы ни были открытое в X подмножество U, ориентация ξ расслоения $M \mid U$ и дифференциальная форма α на U, такие, что $\omega \mid U = \xi \otimes \alpha$, справедливо равенство $d\omega \mid U = \xi \otimes d\alpha$. Форма $d\omega$ принадлежит классу C^{s-1}; она называется *внешним дифференциалом* формы ω.

Если обозначить через $\tilde{\omega}$ (соотв. $\widetilde{d\omega}$) дифференциальную форму на Or_M, отвечающую форме ω (соотв. $d\omega$), как в 10.3.3, то $d(\tilde{\omega}) = \widetilde{d\omega}$

Если ζ — векторное поле класса C^s на X, аналогично определяется M-скрученная форма $\theta_\zeta . \omega$. Имеем

$$\theta_\zeta . \omega = d(i(\zeta)\omega) + i(\zeta)\, d\omega,$$

и $\theta_\zeta . \omega$ принадлежит классу C^{s-1}.

10.4. Мера, ассоциированная со скрученной дифференциальной формой

Напомним, что в этом пункте мы предполагаем, что $K = \mathbf{R}$ и все рассматриваемые многообразия локально конечномерны.

10.4.1. Пусть X — многообразие класса C^r. Можно применить определения и результаты из n° 10.3, взяв в качестве M *касательное расслоение* $T(X)$. Тогда $\mathrm{Or}_M = \tilde{X}$ (10.2.4); через $\tilde{\mathbf{R}}_X$ обозначается расслоение $\tilde{\mathbf{R}}_{T(X)}$, которое называют просто *расслоением скрученных скаляров* (10.3.1) [1]; $T(X)$-скрученная дифференциальная форма со значениями в векторном расслоении F называется просто *скру-*

[1]) Предостерегаем, что это обозначение находится в противоречии с обозначением $\tilde{\mathbf{R}}_M$, если X считается наделенным структурой векторного расслоения ранга 0 над самим собой.

ченной (или *нечетной*) *дифференциальной формой* со значениями в F. Если X наделено *ориентацией*, отображение $\omega \mapsto \xi \otimes \omega$ позволяет отождествить обычные дифференциальные формы (иногда называемые «четными») со скрученными формами.

10.4.2. Пусть f: $X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, и пусть $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ — ориентация морфизма f (10.2.5). Существует один и только один такой изоморфизм j из $f^*(\tilde{\mathbf{R}}_Y)$ на $\tilde{\mathbf{R}}_X$, что $\tilde{x} = j(\pi(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}))$ для всякого $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Эти два расслоения отождествляются с помощью j. Если ω — скрученная форма степени p на Y со значениями в векторном расслоении F, то обратный образ $f^*\omega$ отождествляется со скрученной дифференциальной формой степени p на X со значениями в $f^*(F)$. Если обозначить через $\tilde{\omega}$ (соотв. $\widetilde{f^*(\omega)}$) дифференциальную форму на $\tilde{Y}$ (соотв. $\tilde{X}$), отвечающую, как в 10.3.3, форме ω (соотв. $f^*(\omega)$), то $\tilde{f}^*(\tilde{\omega}) = \widetilde{f^*(\omega)}$.

Если F — тривиальное расслоение, определенное некоторым банаховым пространством, то операция f^* коммутирует с внешним дифференцированием (10.3.4).

10.4.3. Пусть X — *чистое многообразие размерности* n и ω — скрученная дифференциальная форма степени n на X со значениями в банаховом пространстве E. Пусть $c = (U, \varphi, \mathbf{R}^n)$ — карта на X и ξ^n — каноническая ориентация пространства $\mathbf{R}^n$; обозначим через $u^1, \ldots, u^n$ координатные функции на $\mathbf{R}^n$. На $\varphi(U)$ существует одна и только одна такая функция f_c со значениями в E, что

$$\omega \mid U = \varphi^*(\xi^n \otimes f_c \cdot du^1 \wedge \ldots \wedge du^n).$$

Говорят, что ω *локально интегрируема*, если для всякой карты $c = (U, \varphi, \mathbf{R}^n)$ на X соответствующая функция f_c локально интегрируема по отношению к $\lambda_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ (где λ означает лебегову меру на $\mathbf{R}$). Предположим, что это так и что X *отделимо*. На X существует одна и только одна векторная мера $\alpha(\omega)$ со значениями в E, обладающая следующим свойством: для всякой карты $c = (U, \varphi, \mathbf{R}^n)$ на X образ при φ ограничения меры $\alpha(\omega)$ на U есть мера $f_c \cdot \lambda_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ (*Интегр.*, гл. VI, § 2, n° 4). Говорят, что $\alpha(\omega)$ есть *мера, определенная формой* ω, и ее чаще всего обозначают просто через ω. Носитель меры $\alpha(\omega)$ содержится в носителе Supp ω формы ω (если назвать *носителем* дифференциальной формы ω замыкание множества таких $x \in X$, что $\omega(x) \neq 0$).

Если f — вещественная функция на X, локально интегрируемая по мере $\alpha(\omega)$, то дифференциальная форма $f\omega$ локально интегрируема и $\alpha(f\omega) = f \cdot \alpha(\omega)$.

Если g — вещественная функция на X, существенно интегрируемая по мере $\alpha(\omega)$, то ее интеграл, как правило, обозначается через $\int\limits_X g\omega$, или $\int g\omega$, или $\int g(x)\,\omega(x)$; *от обозначения* интеграла символом $\int g\,d\omega$ мы *воздерживаемся* ввиду опасности путаницы с внешним дифференциалом $d\omega$ формы ω, который определен (и, впрочем, равен 0), если ω принадлежит классу C^1. Если A — подмножество в X, характеристическая функция φ_A которого существенно интегрируема по мере $\alpha(\omega)$, то интеграл функции φ_A обозначается через $\int\limits_A \omega$. Если константа 1 существенно интегрируема по мере $\alpha(\omega)$, говорят, что ω *интегрируема.*

Пусть теперь p — целое число, причем $0 \leqslant p \leqslant n$, и ω — скрученная дифференциальная форма степени p на X со значениями в банаховом пространстве E. Пусть, кроме того, Y — чистое подмногообразие размерности p в X; предположим, что каноническая инъекция $i\colon Y \to X$ наделена *ориентацией.* Обратный образ $i^*(\omega)$ (10.4.2) обозначается иногда через $\omega \mid Y$. Если $\omega \mid Y$ интегрируема, полагаем

$$\int\limits_Y \omega = \int\limits_Y \omega \mid Y.$$

10.4.4. Пусть X — чистое многообразие размерности n, наделенное некоторой *ориентацией* ξ. Отождествление $\omega \mapsto \xi \otimes \omega$ обычных дифференциальных форм и скрученных дифференциальных форм позволяет применить вышеизложенное к формам степени n на X; таким образом, со всякой локально интегрируемой формой ω степени n ассоциируется мера на X, обозначаемая также через ω. Если $E = \mathbf{R}$, такая форма ω имеет локально интегрируемый модуль (10.1.5), и соответствующая мера $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$ (10.1.6) есть не что иное, как *норма* $|\omega|$ меры ω (*Интегр.*, гл. III, § 1, n° 6).

10.4.5. *Пример.* Пусть X — чистое вещественное многообразие размерности 1, ориентированное и отделимое, и пусть $z\colon X \to \mathbf{C}$ — дифференцируемое отображение из X в $\mathbf{C}$. Комплексная дифференциальная форма dz определяет на X *комплексную меру,* также обозначаемую через dz. Это применимо, в частности, в случае, когда X есть чистое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$, где z — инъекция из X в $\mathbf{C}$.

Более частным образом, возьмем в качестве X *окружность* с центром в 0 и радиуса $\rho > 0$; ориентируем X как указано в 10.2.8, b), приняв во внимание обычное отождествление $\mathbf{C}$ с $\mathbf{R}^2$; если $x \in X$, то касательное пространство $T_x(X)$ отождествляется с прямой $\mathbf{R}ix$ в $T_x(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$, и выбранная ориентация есть полупрямая $\mathbf{R}_+ix$. Если f — непрерывная функция на X со значениями в

комплексном банаховом пространстве, то интеграл функции f по мере dz задается формулой

$$\int_X f(z)\,dz = i\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\alpha})\,e^{i\alpha}d\alpha.$$

Например, если n — целое число, то

$$\int_X z^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\alpha}d\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2i\pi, & \text{если } n = -1. \end{cases}$$

10.4.6. (*Комплексный случай*.) Пусть X^c — отделимое чистое комплексно-аналитическое многообразие размерности m и ω — голоморфная дифференциальная форма степени m на X^c. Пусть X — вещественно-аналитическое многообразие, лежащее ниже X^c; форма ω отождествляется с формой типа $(m, 0)$ на X (8.8.9); пусть $\overline{\omega}$ — сопряженная к ней форма (8.8.2). Форма $i^{m^2}\omega \wedge \overline{\omega}$ есть *вещественная* дифференциальная форма степени $2m$ на X; с учетом канонической ориентации многообразия X (10.2.7) эта форма отождествляется с мерой на X, которая есть не что иное, как *положительная мера* $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$, определенная в 10.1.6, где μ — мера, определенная дифференциальной формой $i\,dz \wedge \overline{dz}$, другими словами, удвоение лебеговой меры $\lambda^{\otimes 2}$ на $\mathbf{C}$ (отождествленном с $\mathbf{R}^2$ обычным образом).

Пусть H — пространство таких голоморфных форм ω степени m на X^c, что мера $\omega \wedge \overline{\omega}$ ограничена. Для α, β из H комплексная мера $\alpha \wedge \overline{\beta}$ ограничена; полагая

$$(\alpha \mid \beta) = i^{m^2} \int_X \alpha \wedge \overline{\beta},$$

получаем эрмитову форму на H, превращающую H в *гильбертово пространство*.

§ 11. Формула Стокса

В этом параграфе предполагается, что $K = \mathbf{R}$.

11.1. Куски

11.1.1. Пусть E — банахово пространство. Подмножество S в E называется *замкнутым полупространством,* если существуют такие непрерывная линейная форма $h \neq 0$ и вещественное число k, что $S = \{x \mid h(x) \leqslant k\}$ (см. *Esp. vect. top.*, chap., § 2, n° 6 [1])); граница полупространства S есть тогда замкнутая гиперплоскость $\{x \mid h(x) = k\}$; ее также называют *краем* полупространства S и обозначают через ∂S.

11.1.2. Пусть X — многообразие класса C^r и A — подмножество в X. Говорят, что A есть *кусок* многообразия X, если для всякого $a \in A$ существует такая карта $c = (U, \varphi, E)$ на X в a, что $\varphi(A \cap U)$ есть открытое подмножество некоторого замкнутого полупространства в E. Положим $\partial A = A - \mathring{A}$ (множество невнутренних точек в A). Это *подмногообразие* в A, которое называется *краем* куска A [2]). Если $a \in \partial A$, существуют центрированная в a карта (U, φ, E) на X и замкнутая гиперплоскость H в E, такие, что $\varphi(A \cap U)$ есть открытая окрестность нуля в одном из замкнутых полупространств S_c пространства E, определенных гиперплоскостью H (*Esp. vect. top.* chap. II, § 2, n° 6 [3])), и что $\varphi(\partial A \cap U) = H \cap \varphi(A \cap U)$. Такая карта называется *приспособленной* к A в a. Замкнутое полупространство S_c есть тогда единственное замкнутое полупространство в E, в котором $\varphi(A \cap U)$ открыто.

---

[1]) См. также *Топ. вект. пр.,* гл. II, § 1, n° 6.— *Прим. перев.*

[2]) Эта терминология возникает благодаря тому, что A естественно наделено структурой «многообразия с краем» с краем ∂A. По поводу определения категории таких многообразий, равно как и более общей категории «многообразий с углами» («variétés á bord anguleux»), читатель может обратиться к H. Cartan, *Séminaire* 1961/1962, *Topologie Différentielle,* exposés 1—2—3 (par A. Douady), Benjamin, New York, 1969. Отметим, что, как можно показать, всякое «многообразие с краем», край которого паракомпактен, изоморфно замкнутому куску некоторого многообразия.

[3]) См. также *Топ. вект. пр., гл.* II, § 1, n° 6.— *Прим. перев.*

Для того чтобы замкнутое подмножество A в X было куском, необходимо и достаточно, чтобы $\mathring{A}$ было плотно в A и чтобы $A - \mathring{A}$ было подмногообразием в X коразмерности 1 в каждой своей точке.

11.1.3. *Примеры*

a) В $\mathbf{R}^n$ замкнутый шар радиуса >0 является куском; его край есть соответствующая сфера.

b) Если A — кусок многообразия X и B — *замкнутое* подмножество в ∂A, то $A - B$ есть кусок многообразия X.

c) Пусть φ: $X \to X'$ — морфизм многообразий класса C^r и A' — кусок многообразия X'. Если φ трансверсален к $\partial A'$ (5.11.6), то $\varphi^{-1}(A')$ является куском многообразия X, край которого есть $\varphi^{-1}(\partial A')$.

В частности, пусть h: $X \to \mathbf{R}$ — функция класса C^r и $a \in \mathbf{R}$; предположим, что не существует такого $x \in X$, что $h(x) = a$ и и $d_x h = 0$. Множество $\{x \mid h(x) \leqslant a\}$ есть замкнутый кусок многообразия X с краем $h^{-1}(a)$.

d) Если $r = \infty$ и если X локально компактно, то всякий компакт в X допускает фундаментальную систему окрестностей, образованную компактными кусками.

11.1.4. Пусть X — многообразие класса C^r и A — кусок многообразия X. Пусть, далее, $a \in \partial A$, $v \in T_a(X)$, $c = (U, \varphi, E)$ — карта на X, приспособленная к A в a (11.1.2), и $h = \theta_c^{-1}(v)$ — элемент из E, отвечающий v (5.5.1). Рассмотрим в E замкнутое полупространство S_c, в котором $\varphi(A \cap U)$ открыто (11.1.2). Говорят, что v есть *входящий* (соотв. *строго входящий*, соотв. *выходящий*, соотв. *строго выходящий*) *вектор* для A в a, если h принадлежит S_c (соотв. $\mathring{S}_c$, $-S_c$, $-\mathring{S}_c$); это условие не зависит от выбора приспособленной карты c. Через $T_a^+(A)$ (соотв. $T_a^-(A)$) обозначается множество выходящих (соотв. входящих) векторов из $T_a(X)$ для куска A. Это замкнутые полупространства в $T_a(X)$, край которых содержит 0. Имеем

$$T_a(\partial A) = T_a^+(A) \cap T_a^-(A).$$

11.2. Формула Стокса для кусков

В этом пункте через X обозначается отделимое чистое конечномерное многообразие размерности n и класса C^r ($r \geqslant 2$). Через A обозначается кусок многообразия X и через i — каноническая инъекция края ∂A в X. Через E обозначается некоторое банахово пространство.

11.2.1. Пусть $x \in \partial A$ и ξ — ориентация пространства $T_x(\partial A)$; через $\tilde{i}_x(\xi)$ обозначается ориентация пространства $T_x(X)$, содержащая элементы вида $v \wedge u$, где v — строго выходящий вектор для A в x (11.1.4), а u — ненулевой элемент из $\bigwedge^{n-1} T_x(\partial A)$, принадлежащий ориентации ξ. Отображение $\tilde{i}_x$ есть биекция из Or $(T_x(\partial A))$ на Or $(T_x(X))$. Совокупность отображений $\tilde{i}_x$ при $x \in \partial A$ определяет морфизм $\tilde{i}$: $\widetilde{\partial A} \to X$, который является *ориентацией* морфизма i (10.2.5). Если ξ — ориентация многообразия X, говорят, что ориентация края ∂A, которая ассоциирована с ξ посредством $\tilde{i}$ (10.2.5), *определена ориентацией* ξ.

Пример. Если $X = \mathbf{R}^n$, ξ — обычная ориентация пространства $\mathbf{R}^n$ и A — замкнутый шар радиуса >0, то ориентация сферы ∂A, определенная ориентацией ξ, есть каноническая ориентация (10.2.8, b)).

11.2.2. Пусть ω — скрученная дифференциальная форма степени p на X со значениями в E (10.4.1); обратный образ $i^*(\omega)$ формы ω относительно ориентированного морфизма i: $\partial A \to X$ обозначается через $\omega \mid \partial A$ и называется *формой, индуцированной формой* ω *на* ∂A (см. 10.4.3).

11.2.3. Сделаем одно из следующих двух предположений:

(i) ω есть скрученная дифференциальная форма степени $n - 1$ на X со значениями в E;

(ii) X ориентировано, ∂A наделен соответствующей ориентацией (11.2.1) и ω есть дифференциальная форма степени $n - 1$ на X со значениями в E.

Предположим дополнительно, что ω принадлежит *классу* C^1 и что пересечение куска A с носителем формы ω компактно. Внешний дифференциал $d\omega$ формы ω непрерывен (8.3.5 и 10.3.4). Характеристическая функция множества A существенно интегрируема по векторной мере, определенной формой $d\omega$ на X, и дифференциальная форма $\omega \mid \partial A$ степени $n - 1$ на ∂A интегрируема (10.4.3 и 10.4.4). Тогда

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega \quad (\textit{формула Стокса}).$$

11.2.4. Пусть α — скрученная дифференциальная форма степени n на X со значениями в E с компактным носителем и класса C^1. Для того, чтобы существовала скрученная дифференциальная форма ω степени $n - 1$ на X со значениями в E с компактным носителем

и класса C^1, такая, что $\alpha = d\omega$, необходимо, чтобы $\int_X \alpha = 0$; если X связно, это условие является достаточным; если к тому же α принадлежит классу C^k ($k \leqslant r - 1$, $k \neq \omega$), можно выбрать форму ω класса C^k.

11.2.5. Предположим, что X — вещественное многообразие, лежащее ниже **C**, что E — комплексное банахово пространство и что A — *компактный* кусок многообразия X. Наделим X ориентацией, определяемой его комплексной структурой (10.2.7). Пусть f — *непрерывное* отображение из A в E, ограничение которого на внутренность $\mathring{A}$ куска A голоморфно. Обозначим через dz дифференциал инъекции z: $\partial A \to \mathbf{C}$. Форма $f \,.\, dz$, произведение f и dz, есть дифференциальная форма степени 1 на ∂A со значениями в E класса C^0 и

$$\int_{\partial A} f \,.\, dz = 0 \qquad (\textit{формула Коши}).$$

Если f продолжается до голоморфного отображения, также обозначаемого через f, некоторой открытой окрестности U куска A со значениями в E, то дифференциальная форма $f \,.\, dz$ (где z означает на этот раз каноническую инъекцию множества U в **C**) принадлежит классу C^ω на U, и ее внешний дифференциал равен нулю.

11.2.6. (*Производная от интеграла.*) Предположим, что X ориентировано. Пусть Y — многообразие класса C^r и α — дифференциальная форма степени n на Y со значениями в E класса C^1 и с компактным носителем. Пусть I — открытое подмножество в **R**, содержащее 0, и g: $I \times X \to Y$ — морфизм класса C^r; для $t \in I$ обозначим через g_t отображение $x \mapsto g(t, x)$ из X в Y. Обозначим через ψ морфизм из X в $T(Y)$, определенный формулой $\psi(x) = T_{0,x}(g)(1, 0)$; это *поднятие* морфизма g_0 (8.6.5). Предположим, что ограничение проекции pr_1: $I \times A \to I$ на пересечение множества $I \times A$ с носителем формы $g^*(\alpha)$ является *собственным* отображением (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 10). Для всякого $t \in I$ пересечение множества A с носителем формы $\overset{*}{g_t}(\alpha)$ тогда компактно; отображение $t \mapsto \int_A \overset{*}{g_t}(\alpha)$ принадлежит классу C^1 на I, и его производная в нуле задается формулой

$$\frac{d}{dt}\left(\int_A \overset{*}{g_t}(\alpha)\right)_{t=0} = \int_A \theta_\psi \,.\, \alpha = \int_A i(\psi)\, d\alpha + \int_{\partial A} i(\psi)\, \alpha,$$

ср. с n° 8.6.

11.3. Формула Стокса для локально полиэдральных множеств[1]

В этом пункте X означает чистое вещественное многообразие размерности n класса C^r ($r \geqslant 2$); оно предполагается отделимым.

11.3.1. Пусть A — подмножество конечномерного вещественного векторного пространства. Говорят, что A *полиэдрально,* если оно есть конечное объединение конечных пересечений замкнутых полупространств.

Подмножество A в X называется *локально полиэдральным,* если для всякого $x \in X$ существуют карта $c = (U, \varphi, E)$ на X в x и полиэдральное подмножество A_c в E, такие, что $\varphi(A \cap U) = \varphi(U) \cap A_c$. Кусок многообразия X есть локально полиэдральное подмножество.

11.3.2. Пусть A — замкнутое подмножество в X, и пусть $\mathrm{Fr}(A) = A - \mathring{A}$ — его граница. Точка $x \in \mathrm{Fr}(A)$ называется *регулярной,* если существует такая открытая окрестность U, что $A \cap U$ есть кусок многообразия U (в этом случае x принадлежит краю куска $A \cap U$). Через ∂A обозначается множество регулярных точек в $\mathrm{Fr}(A)$; оно называется *регулярным краем* (или просто *краем*) множества A. Множество $A' = \mathring{A} \cup \partial A$ есть кусок многообразия X, и край его есть ∂A.

11.3.3.* *Пример.* Пусть $\mathcal{H}$ — локально конечное семейство гиперповерхностей аффинного вещественного пространства E конечной размерности n и C — *камера* в E относительно $\mathcal{H}$ (*Гр. и алг. Ли*, гл. V, § 1, n° 3). Замыкание $\overline{C}$ камеры C есть локально полиэдральное подмножество многообразия E; регулярный край множества $\overline{C}$ есть объединение *граней* камеры C (*loc. cit.*, n° 4). В частности, если C есть *открытый симплекс* (*loc. cit.*, n° 6) с вершинами $a_0, \ldots, a_n$, то край множества $\overline{C}$ есть объединение множеств $C_{(i)}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, где $C_{(i)}$ — открытый симплекс с вершинами $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ в аффинном пространстве, порожденном этими вершинами. *

11.3.4. Пусть A — локально полиэдральное подмножество в X и ω — скрученная дифференциальная форма степени $n-1$ на X со значениями в банаховом пространстве E; предположим, что форма ω принадлежит классу C^1 и что пересечение ее носителя с A

[1]) Читатель, интересующийся более общими случаями, может обратиться к книге Х. Уитни, *Геометрическая теория интегрирования,* гл. III, § 18, ИЛ, М., 1960.

компактно. Тогда характеристическая функция множества A (соотв. A', $\mathring{A}$) существенно интегрируема относительно векторной меры, определенной формой $d\omega$ на X, и

$$\int_A d\omega = \int_{A'} d\omega = \int_{\mathring{A}} d\omega.$$

Дифференциальная форма $\omega \mid \partial A$ (относительно канонической ориентации канонической инъекции подмногообразия ∂A, рассматриваемого как край куска A', в X) интегрируема в ∂A и

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega \quad (\textit{формула Стокса}).$$

Если X наделено *ориентацией* и если наделить соответствующей ориентацией ∂A (11.2.1), то эта формула справедлива также, если ω — обычная дифференциальная форма степени $n - 1$ со значениями в E класса C^1 и такая, что $A \cap \operatorname{Supp} \omega$ компактно.

11.4. Относительная формула Стокса (интегрирование вдоль слоев)

В этом пункте через X и S обозначаются два (вещественных) многообразия класса C^r и через π: $X \to S$ — *субмерсия*. Через n обозначается целое число, и мы предполагаем, что для всякого $s \in S$ слой $X_s = \pi^{-1}(s)$ отображения π в s (являющийся подмногообразием в X (5.10.5)) есть *чистое* подмногообразие *размерности* n.

11.4.1. Пусть E и H — два векторных пространства, и пусть F — векторное подпространство в H конечной размерности n. Пусть p — целое число $\geqslant 0$, u — некоторое $(n+p)$-линейное знакопеременное отображение из H^{n+p} в E и $t_1, \ldots, t_p$ — элементы из H/F; пусть $t'_1, \ldots, t'_p$ — представители элементов $t_1, \ldots, t_p$ в H. Отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto u(t'_1, \ldots, t'_p, x_1, \ldots, x_n)$$

есть n-линейное знакопеременное отображение из F^n в E, которое зависит лишь от u и от элементов t_i; оно обозначается через $U \llcorner (t_1, \ldots, t_p)$ (см. *Alg.*, chap. III, p. 158[1]), для частного случая $E = K$). Отображение

$$(t_1, \ldots, t_p) \mapsto u \llcorner (t_1, \ldots, t_p)$$

p-линейно и знакопеременно.

[1]) См. также *Алг.*, гл. III, § 8, n° 4.— *Прим. перев.*

11.4.2. (π-*кручение.*) Рассмотрим векторное расслоение $T\,(X/S)$ на X (8.1.3); оно имеет ранг n в каждой точке x из X. Положим $\widetilde{\mathbf{R}}_\pi = \widetilde{\mathbf{R}}_{T(X/S)}$ (10.3.1) и $\widetilde{X}_\pi = \mathrm{Or}_{T(X/S)}$ (10.2.2). Пусть $s \in S$; с учетом естественного отождествления расслоения $T\,(X/S) \mid X_s$ с $T\,(X_s)$ (8.1.3) получаем, что слой в s отображения $\widetilde{\pi}$: $\widetilde{X}_\pi \to S$, являющегося композицией отображения π и канонического отображения $\widetilde{X}_\pi \to X$, есть $\widetilde{X}_s$ (10.2.4). Назовем *π-скрученной дифференциальной формой на* X любую $T\,(X/S)$-скрученную дифференциальную форму (10.3.3).

11.4.3. (S-*ориентация* S-*морфизма.*) Пусть X' — многообразие, наделенное субмерсией π': $X' \to S$, слои которой X'_s суть чистые подмногообразия конечной размерности n', и пусть φ: $X' \to X$ — такой морфизм, что $\pi' = \pi \circ \varphi$. Назовем *S-ориентацией* морфизма φ морфизм $\widetilde{\varphi}$: $\widetilde{X}'_{\pi'} \to \widetilde{X}_\pi$, коммутирующий с действием группы $\{\pm 1\}$ и такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}'_{\pi'} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \widetilde{X}_\pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

коммутативна. Задание S-ориентации морфизма φ позволяет, как в 10.4.2, отождествить расслоения $\widetilde{\mathbf{R}}_{\pi'}$ и $\varphi^*\,(\widetilde{\mathbf{R}}_\pi)$ и определить обратный образ π-скрученной дифференциальной формы относительно S-ориентированного морфизма φ: он является π'-скрученной дифференциальной формой на X'.

11.4.4. Пусть A — такой кусок многообразия X, что ограничение отображения π на ∂A есть *субмерсия*. Для всякого $s \in S$ слой $X_s = \pi^{-1}\,(s)$ есть подмногообразие в X, трансверсальное к ∂A, и $A \cap X_s$ есть кусок многообразия X_s, обозначаемый через A_s, с краем $\partial A \cap X_s$.

Пусть i — каноническая инъекция края ∂A в X. Существует одна и только одна такая S-ориентация $\widetilde{i}$ морфизма i, что для всякого $s \in S$ ограничение морфизма $\widetilde{i}$ на подмногообразие $(\partial A_s)^\sim$ (которое отождествляется со слоем в s субмерсии $\widetilde{\partial A}_{\pi|\partial A} \to S$) есть ориентация канонической инъекции подмногообразия ∂A_s в X_s, определенная в 11.2.1. Если ω есть π-скрученная дифференциальная форма на X, то обратный образ формы ω относительно так ориентированного морфизма i обозначается через $\omega \mid \partial A$ (ср. с 11.2.2).

11.4.5. (*Внутреннее произведение.*) Пусть p — целое число $\geqslant 0$ и ω — некоторая π-скрученная дифференциальная форма степени

$n+p$ на X со значениями в векторном расслоении E и с базой X. Пусть $s \in S$ и $x \in X_s$; тогда $\omega(x) = \xi \otimes u$, где ξ — ориентация пространства $T_x(X_s) = T(X/S)_x$, отождествляемая с элементом из $(\tilde{\mathrm{R}}_{X_s})_x = (\tilde{\mathrm{R}}_\pi)_x$ (10.3.2), и где u есть $(n+p)$-линейное знакопеременное отображение из $T_x(X)$ в E_x. Пусть $t_1, \ldots, t_p$ — касательные вектора к S в s. Положим

$$\theta(x) = \xi \otimes (u \llcorner (t_1, \ldots, t_p)) \in (\tilde{\mathrm{R}}_{X_s})_x \otimes \mathrm{Alt}^n(T(X); E)_x{}^{1)}$$

(см. 11.4.1). Этим определяется скрученная дифференциальная форма θ: $x \mapsto \theta(x)$ степени n на X_s со значениями в $E \mid X_s$. Ее обозначают через $\omega \llcorner (t_1, \ldots, t_p)$.

В частности, пусть M — векторное расслоение класса C^{r-1} с базой S, и положим $E = \pi^*(M)$. Расслоение $E \mid X_s$ естественно отождествляется с тривиальным расслоением с базой X_s, определенным банаховым пространством M_s, и форма $\omega \llcorner (t_1, \ldots, t_p)$ отождествляется со скрученной дифференциальной формой на X_s со значениями в M_s.

11.4.6. Сохраним предыдущие обозначения (в частности, $E = \pi^*(M)$) и предположим дополнительно, что X *отделимо* и что ω *непрерывна.* Пусть A — такой кусок многообразия X, что ограничение отображения π на ∂A является *субмерсией* и ограничение отображения π на пересечение куска A с носителем формы ω собственно. Для $s \in S$ и элементов $t_1, \ldots, t_p$ из $T_s(S)$ форма $\omega \llcorner (t_1, \ldots, t_p)$ (11.4.5) есть скрученная дифференциальная форма степени n на X_s, непрерывная и со значениями в банаховом пространстве M_s, и ее носитель пересекается с A_s по компактному множеству. Существует одна и только одна такая дифференциальная форма α степени p на S со значениями в векторном расслоении M, что

$$\alpha(s)(t_1, \ldots, t_p) = \int\limits_{A_s} \omega \llcorner (t_1, \ldots, t_p),$$

каковы бы ни были $s \in S$ и $t_1, \ldots, t_p$ в $T_s(S)$. Форма α обозначается через $\int\limits_{\pi \mid A} \omega$ (или просто через $\int\limits_{\pi} \omega$, если $A = X$); говорят, что она получается в результате *интегрирования формы ω по A вдоль слоев отображения π.* Если ω принадлежит классу C^k $(0 \leqslant k \leqslant r-1,\ k \leqslant \infty)$, такова же и форма $\int\limits_{\pi \mid A} \omega$.

Если ω — форма степени $< n$, условимся, что $\int\limits_{\pi \mid A} \omega = 0$.

---

1) Эта запись некорректна. Следует заменить $\mathrm{Alt}^n(T(X); E)_x$ на $\mathrm{Alt}^n(T(X_s); E \mid X_s)_x$.— *Прим. перев.*

11.4.7. Сохраним предыдущие предположения и обозначения.

а) Для всякой непрерывной скалярной дифференциальной формы β на S имеем

$$\int_{\pi \mid A} (\pi^*\beta) \wedge \omega = \beta \wedge \int_{\pi \mid A} \omega.$$

b) Пусть η — непрерывное векторное поле на X и ζ — непрерывное векторное поле на S, такие, что η π-связано с ζ (8.2.6). Тогда

$$i(\zeta) \int_{\pi \mid A} \omega = \int_{\pi \mid A} i(\eta)\, \omega.$$

с) Предположим дополнительно, что η, ζ и ω принадлежат классу C^1, что $\eta(x) \in T_x(\partial A)$ для всякого $x \in \partial A$ и что M есть тривиальное расслоение, определенное банаховым пространством E. Тогда

$$\theta_\zeta . \int_{\pi \mid A} \omega = \int_{\pi \mid A} \theta_\eta . \omega$$

(см. 8.4.2 и 10.3.4).

d) Если ω имеет степень $n + p$ и принадлежит классу C^1, то

$$d\Big(\int_{\pi \mid A} \omega\Big) = \int_{\pi \mid A} d\omega + (-1)^p \int_{\pi \mid \partial A} \omega \mid \partial A.$$

е) Предположим, что S сводится к одной точке. Тогда π-скрученные формы на X суть обычные скрученные формы (10.4.1). Если ω имеет степень n, то форма $\int_{\pi \mid A} \omega$ степени 0 на S есть константа $\int_A \omega$ (10.4.3).

11.4.8. Пусть π': $S \to S'$ — такая субмерсия, что слои отображения π' суть чистые подмногообразия конечной размерности n'. Положим $\pi'' = \pi' \circ \pi$; это — субмерсия из X на S', слои которой суть чистые подмногообразия размерности $m = n + n'$.

Пусть $x \in X$. Последовательность

$$0 \to T(X/S)_x \xrightarrow{\mathrm{Id}} T(X/S')_x \xrightarrow{T_x(\pi)} T(S/S')_{\pi(x)} \to 0$$

точна. Существует один и только один такой изоморфизм j векторного расслоения $\widetilde{\mathbf{R}}_\pi \otimes \pi^*(\widetilde{\mathbf{R}}_{\pi'})$ на $\widetilde{\mathbf{R}}_{\pi''}$, что, если ξ (соотв. η) есть ориентация пространства $T(X/S)_x$ (соотв. пространства $(\pi^*T(S/S'))_x$, отождествляемого с $T(S/S')_{\pi(x)}$), то $j(\xi \otimes \eta) = \eta\xi$ (где произведение определено предыдущей точной последовательностью (10.2.1)).

Пусть M' — векторное расслоение с базой S'; положим $M = \pi'^*(M')$ и $E = \pi^*(M) = \pi''^*(M')$. Если ω — некоторая

π''-скрученная дифференциальная форма на X со значениями в E, то изоморфизм j позволяет отождествить ее с π-скрученной формой со значениями в $\pi^* (\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'}) \otimes E$, или, что то же самое, со значениями в $\pi^* (\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'} \otimes M)$.

Пусть дополнительно A — такой кусок многообразия X, что $\pi \mid \partial A : \partial A \to S$ есть субмерсия; тогда субмерсией является также $\pi'' \mid \partial A : \partial A \to S'$. Предположим, кроме того, что ω *непрерывна* и что ограничение отображения π'' на $A \cap \operatorname{Supp} \omega$ *собственно;* таково же тогда и ограничение отображения π на $A \cap \operatorname{Supp} \omega$. Можно рассматривать, с одной стороны, дифференциальную форму $\int\limits_{\pi'' \mid A} \omega$ на S', которая принимает значения в M', а с другой стороны, дифференциальную форму $\int\limits_{\pi \mid A} \omega$ на S, которая является формой со значениями в $\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'} \otimes M$, а также π'-скрученной формой со значениями в $M = \pi'^* (M')$. Более того, $\pi (A)$ есть открытое подмногообразие в S, и ограничение отображения π' на $\pi (A) \cap \operatorname{Supp} \int\limits_{\pi \mid A} \omega$ собственно. Дифференциальная форма $\int\limits_{\pi' \mid \pi(A)} \int\limits_{\pi \mid A} \omega$ определена; это дифференциальная форма на S' со значениями в M'. Тогда

$$\int\limits_{\pi' \circ \pi \mid A} \omega = \int\limits_{\pi' \mid \pi(A)} \int\limits_{\pi \mid A} \omega.$$

Если $A = X$, то

$$\int\limits_{\pi' \circ \pi} \omega = \int\limits_{\pi'} \int\limits_{\pi} \omega.$$

§ 12. Струи

В этом параграфе X и Y означают два многообразия класса C^r, где $r \in N_K$, и k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant r$.

Начиная с n° 12.3, предполагается, что:

либо K имеет характеристику нуль;

либо все рассматриваемые многообразия, банаховы пространства и векторные расслоения локально конечномерны.

12.1. Струи отображений

12.1.1. Пусть $x \in X$ и f, g — два непрерывных отображения, определенных в некоторой окрестности точки x и принимающих значения в Y. Говорят, что f и g имеют в x *контакт порядка* $\geqslant k$, если $f(x) = g(x)$ и существуют такие карты (U, φ, E) на X в x и (V, ψ, F) на Y в $f(x)$, что отображения $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ и $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$, определенные в некоторой окрестности точки $\varphi(x)$ в E и принимающие значения в F, имеют в $\varphi(x)$ контакт порядка $\geqslant k$ (1.1.2). Это условие выполнено тогда для всех карт на X в x и на Y в $f(x)$.

12.1.2. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. В множестве отображений класса C^r, определенных в окрестности точки x, принимающих значения в Y и переводящих x в y, отношение «f и g имеют контакт порядка $\geqslant k$» есть отношение эквивалентности; класс отображения f относительно него обозначается через $j_x^k(f)$ и называется *струей порядка* k отображения f *с началом* x *и концом* y. Начало струи j обозначается через $\boldsymbol{s}(j)$, и ее конец — через $\boldsymbol{b}(j)$.

Множество струй порядка k из X в Y (соотв. с началом x, соотв. с концом y) обозначается через $J^k(X, Y)$ (соотв. $J_x^k(X, Y)$, соотв. $J^k(X, Y)_y$), и полагаем

$$J_x^k(X, Y)_y = J_x^k(X, Y) \cap J^k(X, Y)_y.$$

12.1.3. Если U и V — открытые подмножества в X и Y соответственно, то $J^k(U, V)$ очевидным образом отождествляется с прообразом подмножества $U \times V$ при отображении

$$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{b}) \colon J^k(X, Y) \to X \times Y.$$

12.1.4. Пусть Z — многообразие класса C^r и $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$. Пусть $j \in J_x^k(X, Y)_y$ и $j' \in J_y^k(Y, Z)_z$. Отображения $f' \circ f$, где $f \in j$ и $f' \in j'$, имеют одну и ту же струю порядка k в x; эта струя называется *композицией* струй j и j' и обозначается через $j' \circ j$; имеем $\boldsymbol{s}(j' \circ j) = \boldsymbol{s}(j)$ и $\boldsymbol{b}(j' \circ j) = \boldsymbol{b}(j')$. Если T — многообразие класса C^r и $j'' \in J_z^k(Z, T)$, то

$$j'' \circ (j' \circ j) = (j'' \circ j') \circ j.$$

12.1.5. Пусть $j \in J_x^k(X, Y)$, где $x \in X$, и k' — такое целое число, что $0 \leqslant k' \leqslant k$. Струи $j_x^{k'}(f)$ для всех $f \in j$ одинаковы; определенная таким способом струя обозначается через $r^{k,k'}(j)$; отображение $r^{k,k'}\colon J^k(X, Y) \to J^{k'}(X, Y)$ сюръективно.

12.1.6. Предположим, что r равно ∞ или ω. Пусть f и g — два отображения класса C^r, определенных в окрестности точки $x \in X$ и принимающих значения в Y. Если $j_x^m(f) = j_x^m(g)$ для всякого целого $m \geqslant 0$, говорят, что f и g имеют *контакт бесконечного порядка* в x. Получаем таким образом отношение эквивалентности, классы которого называются *струями бесконечного порядка* в x; струя бесконечного порядка отображения f обозначается через $j_x^\infty(f)$ или $j_x^\omega(f)$. Предыдущие определения и результаты без изменений распространяются на струи бесконечного порядка.

12.2. Струи отображений банаховых пространств

В этом пункте E и F обозначают банаховы пространства. Если m — целое число $\geqslant 0$, то через $P_m(E; F)$ обозначается банахово пространство *однородных непрерывных многочленов степени m* на E со значениями в F (приложение А.2).

12.2.1. Пусть U — открытое подмножество в E, $f\colon U \to F$ — отображение класса C^r и $a \in U$. Существует один и только один непрерывный многочлен

$$\tilde{f} = f_0 + \cdots + f_k \quad (\text{где } f_m \in P_m(E; F)),$$

который имеет степень $\leqslant k$ и ту же струю порядка k в нуле, что и $x \mapsto f(x - a)$. Если $0 \leqslant m \leqslant k$, то m-я компонента f_m многочлена $\tilde{f}$ обозначается через $\Delta^m f(a)$ или $\Delta_a^m(f)$. Если $r = \omega$, это обозначение совпадает с обозначением в 3.2.1 и 4.2.1; если $r \leqslant \infty$, то

$$m!\,\Delta^m f(a)(h) = D^m f(a)(h, \ldots, h) = D^m f(a) \cdot h^m.$$

Отображение $f \mapsto \tilde{f}$ определяет при переходе к факторам биекцию из $J_a^k(E, F)$ на $\prod_{0 \leqslant m \leqslant k} P_m(E; F)$, с помощью которой эти два пространства отождествляются; в частности, $J_a^k(E, F)$ наделяется структурой банахова пространства над K. Если $j \in J_a^k(E, F)$, через $\Delta_a^m(j)$ обозначается m-я компонента струи j; тогда

$$\Delta_a^m(j) \in P_m(E; F) \text{ при } 0 \leqslant m \leqslant k \text{ и } \Delta_a^0(j) = \boldsymbol{b}(j) \in F.$$

12.2.2. Пусть U (соотв. V) — открытое подмножество в E (соотв. F). Обозначим через $Q^k(E, F)$ банахово пространство, являющееся произведением пространств $P_m(E; F)$ для $1 \leqslant m \leqslant k$. Отображение

$$j \mapsto (\boldsymbol{s}(j), \boldsymbol{b}(j), \Delta_{\boldsymbol{s}(j)}^1(j), \ldots, \Delta_{\boldsymbol{s}(j)}^k(j))$$

есть биекция из $J^k(U, V)$ на $U \times V \times Q^k(E, F)$, с помощью которой эти два множества отождествляются. В частности, $J_0^k(E, F)_0$ отождествляется с $Q^k(E, F)$.

12.3. Многообразия струй

12.3.1. Пусть $c = (U, \varphi, E)$ и $c' = (V, \psi, F)$ — карты на X и Y соответственно. Отображения φ и ψ определяют посредством переноса структуры биекцию π из $J^k(U, V)$ на

$$J^k(\varphi(U), \psi(V)) = \varphi(U) \times \psi(V) \times Q^k(E; F);$$

см. 12.2.2. Если положить $W = J^k(U, V)$ и $G = E \times F \times Q^k(E, F)$, то тройка (W, π, G) будет картой на $J^k(X, Y)$. Полученные таким путем карты образуют C^{r-k}-атлас, и этот атлас наделяет $J^k(X, Y)$ *структурой K-многообразия класса* C^{r-k} [1]).

Если $(x, y) \in X \times Y$, множества $J_x^k(X, Y)$, $J^k(X, Y)_y$ и $J_x^k(X, Y)_y$ суть замкнутые подмногообразия в $J^k(X, Y)$.

12.3.2. Если X и Y суть чистые (соотв. конечномерные, соотв. отделимые, соотв. связные) многообразия, то таково же и $J^k(X, Y)$.

Если U (соотв. V) открыто в X (соотв. в Y), то $J^k(U, V)$ есть открытое подмногообразие в $J^k(X, Y)$; см. 12.1.3.

12.3.3. Отображения $\boldsymbol{s}\colon J^k(X, Y) \to X$, $\boldsymbol{b}\colon J^k(X, Y) \to Y$ и $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{b})\colon J^k(X, Y) \to X \times Y$ суть расслоения (6.1.1) класса C^{r-k}. Если $k = 0$, то $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{b})$ есть изоморфизм.

---

[1]) Если $k = r$ (что возможно лишь при $K = \mathbf{R}$), $J^k(X, Y)$ наделено структурой *топологического многообразия* (см. примечание в начале § 6), и рассматриваемые ниже морфизмы и расслоения должны пониматься в чисто топологическом смысле (см. примечание в начале § 6).

12.3.4. Обозначим через T_X и T_Y векторные расслоения $\mathrm{pr}_1^* T(X)$ и $\mathrm{pr}_2^* T(Y)$ на $X \times Y$, и пусть $\mathscr{L}(T_X; T_Y)$ — расслоение гомоморфизмов из T_X в T_Y (7.7.3); если $(x, y) \in X \times Y$, то

$$\mathscr{L}(T_X; T_Y)_{(x, y)} = \mathscr{L}(T_x(X); T_y(Y)).$$

Пусть $j \in J^k(X, Y)$, $k \geqslant 1$, и пусть $f \in j$. Касательное отображение к f в $x = \boldsymbol{s}(j)$ зависит только от j; оно обозначается через $T(j)$; это элемент из $\mathscr{L}(T_x(X); T_y(Y))$, где $y = \boldsymbol{b}(j)$. Если $k = 1$, то определенное таким путем отображение

$$T: J^1(X, Y) \to \mathscr{L}(T_X; T_Y)$$

есть изоморфизм многообразий класса C^{r-1}.

Для $X = K$ этот изоморфизм отождествляет $J_0^1(K, Y)$ с $T(Y)$; для $Y = K$ он отождествляет $J^1(X, K)_0$ с дуальным к $T(X)$ расслоением $T'(X)$.

12.3.5. Пусть k' — такое целое число, что $0 \leqslant k' \leqslant k$. Отображение

$$r^{k, k'}: J^k(X, Y) \to J^{k'}(X, Y) \qquad \text{(см. 12.1.5.)}$$

есть расслоение класса C^{r-k}.

12.3.6. Пусть Z — многообразие класса C^r и T — множество таких пар

$$(j, j') \in J^k(X, Y) \times J^k(Y, Z),$$

что $\boldsymbol{b}(j) = \boldsymbol{s}(j')$. Тогда T есть подмногообразие в $J^k(X, Y) \times J^k(Y, Z)$, и отображение $(j, j') \mapsto j' \circ j$ есть морфизм класса C^{r-k} из T в $J^k(X, Z)$.

12.3.7. Если $f: X \to Y$ — морфизм класса C^r, то отображение $x \mapsto j_x^k(f)$ есть морфизм $j^k(f)$ класса C^{r-k} из X в $J^k(X, Y)$.

12.3.8. Пусть k' и k'' — положительные целые числа, сумма которых равна k. Пусть $x \in X$, U — открытая окрестность точки $x \in X$ и $f: U \to Y$ — морфизм класса C^r. Отображение

$$x \mapsto j_x^{k'}(f): U \to J^{k'}(X, Y)$$

принадлежит классу $C^{r-k'}$, и его струя в x порядка k'' зависит только от $j_x^k(f)$. Таким образом получаем каноническое отображение

$$\alpha: J^k(X, Y) \to J^{k''}(X, J^{k'}(X, Y))$$

класса C^{r-k}; если K имеет характеристику нуль, это погружение.

12.3.9. Пусть X', Y' — многообразия класса C^r, $f: X \to X'$ и

$g\colon Y' \to Y$ — морфизмы и $(x, y') \in X \times Y'$, $x' = f(x)$, $y = g(y')$. Если $u \in J^k_{x'}(X', Y')_{y'}$, положим

$$J^k_{x'}(f, g)_y(u) = j^k_{y'}(g) \circ u \circ j^k_x(f).$$

Получаем таким способом отображение

$$J^k(f, g)\colon J^k(X', Y') \times_{X'} X \to J^k(X, Y),$$

которое принадлежит классу C^{r-k}.

12.3.10. Пусть A — компактное подмножество в X. Пусть $\mathcal{C}^k(X;Y)$ — множество отображений класса C^k из X в Y. Для всякого $f \in \mathcal{C}^k(X; Y)$ отображение $j^k(f) \mid A$ принадлежит множеству $\mathcal{C}(A; J^k(X, Y))$ непрерывных отображений из A в $J^k(X, Y)$. Этим самым определяется отображение λ из $\mathcal{C}^k(X; Y)$ в $\mathcal{C}(A; J^k(X, Y))$. Прообраз относительно λ топологии компактной сходимости на $\mathcal{C}(A; J^k(X, Y))$ (*Top. gen.*, chap. X, § 3, déf. 1) есть топология на $\mathcal{C}^k(X; Y)$; она называется *топологией равномерной C^k-сходимости на A.*

12.4. Реперы и главные расслоения

12.4.1. Пусть $j \in J^k(X, Y)$ и $x = \boldsymbol{s}(j)$, $y = \boldsymbol{b}(j)$. Говорят, что j *обратима,* если существует такая струя $j' \in J^k_y(Y, X)_x$, что $j' \circ j = j^k_x(\mathrm{Id}_X)$ и $j \circ j' = j^k_y(\mathrm{Id}_Y)$; струя j' тогда определена единственным образом; она обозначается через j^{-1}. Если $k = 0$, всякая струя обратима. Если $k \geqslant 1$, следующие условия эквивалентны:

a) j обратима;

b) отображение $T(j)\colon T_x(X) \to T_y(Y)$ (см. 12.3.4) есть изоморфизм;

c) существует такой изоморфизм g класса C^r открытой окрестности точки x на открытую окрестность точки y, что $j^k_x(g) = j$.

12.4.2. Пусть E — банахово пространство. Через $\mathbf{GL}^k(E)$ обозначается множество струй порядка k из E в E, которые обратимы и имеют 0 своим началом и концом; это множество открыто в $J^k_0(E, E)_0$. Будучи наделено законом композиции струй и структурой многообразия, индуцированной структурой многообразия банахова пространства $J^k_0(E, E)_0 = Q^k(E, E)$, оно становится групповым многообразием класса C^ω.

Имеем $\mathbf{GL}^0(E) = \{e\}$. Группа $\mathbf{GL}^1(E)$ отождествляется с помощью T с группой $\mathbf{GL}(E)$ автоморфизмов пространства E.

Если $k' \leqslant k$, отображение $r^{k,k'}: \mathbf{GL}^k(E) \to \mathbf{GL}^{k'}(E)$ есть гомоморфизм класса C^ω и сюръективная субмерсия. Отображение $f \mapsto \mathrm{Id}_E + f$ есть изоморфизм групповых многообразий из $P_k(E, E)$ на ядро гомоморфизма $r^{k,k-1}$.

12.4.3. Пусть E — банахово пространство. Для всякого $x \in X$ назовем *E-репером порядка k* многообразия X в x всякий обратимый элемент в $J_0^k(E, X)_x$. Множество E-реперов порядка k многообразия X есть открытое подмногообразие $R^k(E, X)$ в $J_0^k(E, X)$; ограничение отображения $\mathfrak{b}$ есть морфизм из $R^k(E, X)$ в X, также обозначаемый через $\mathfrak{b}$; аналогично, если $k' \leqslant k$, то морфизм из $R^k(E, X)$ в $R^{k'}(E, X)$, являющийся ограничением отображения $r^{k,k'}$ из 12.1.5, также обозначается через $r^{k,k'}$

12.4.4. Предполагаем, что X — чистое многообразие типа E (5.1.7). Группа $\mathbf{GL}^k(E)$ действует справа на $R^k(E, X)$ по закону $(\rho, u) \mapsto \rho \circ u$, и четверка $\lambda_X = (R^k(E, X), \mathbf{GL}^k(E), X, \mathfrak{b})$ есть *главное расслоение* (6.2.1) класса C^{r-k} со структурной группой $\mathbf{GL}^k(E)$ и базой X.

Пусть $k' \leqslant k$ и H — ядро гомоморфизма $r^{k,k'}: \mathbf{GL}^k(E) \to \mathbf{GL}^{k'}(E)$; четверка $(R^k(E, X), H, R^{k'}(E, X), r^{k,k'})$ есть главное расслоение класса C^{r-k}.

Многообразие $J^k(X, Y)$ наделено структурой расслоенного пространства, ассоциированного с λ_X (6.5.1): типовой слой есть $J_0^k(E, Y)$, на котором $\mathbf{GL}^k(E)$ действует слева по закону $(u, j) \mapsto j \circ u^{-1}$; реперное отображение $R^k(E, X) \times J_0^k(E, Y) \to J^k(X, Y)$ преобразует (ρ, j) в $j \circ \rho^{-1}$. Проекция $J^k(X, Y) \to X$, отвечающая этой структуре расслоенного пространства, есть $\mathfrak{s}$.

12.4.5. Пусть F — банахово пространство, и предположим, что Y — чистое многообразие типа F. Тогда $J^k(X, Y)$ наделено структурой расслоенного пространства, ассоциированного с λ_Y: типовой слой есть $J^k(X, F)_0$, на котором $\mathbf{GL}^k(F)$ действует слева по закону $(v, j) \mapsto v \circ j$; реперное отображение есть $(\sigma, j) \mapsto \sigma \circ j$; проекцией $J^k(X, Y) \to Y$ является $\mathfrak{b}$.

12.4.6. Сохраним предположения из 12.4.4 и 12.4.5, и пусть μ — главное расслоение

$$(R^k(E, X) \times R^k(F, Y), \mathbf{GL}^k(E) \times \mathbf{GL}^k(F), X \times Y, \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}),$$

являющееся произведением расслоений λ_X и λ_Y. Тогда $J^k(X, Y)$ наделено структурой расслоенного пространства, ассоциированного

с μ: типовой слой есть $J_0^k(E, F)_0$, на котором $\mathrm{GL}^k(E) \times \mathrm{GL}^k(F)$ действует слева по закону $((u, v), j) \mapsto v \circ j \circ u^{-1}$; реперным отображением является $((\rho, \sigma), j) \mapsto \sigma \circ j \circ \rho^{-1}$; проекция $J^k(X, Y) \to X \times Y$ есть $(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$.

12.5. Струи сечений

12.5.1. Пусть $\pi: Y \to X$ — субмерсия, $x \in X$ и $s \in J_x^k(X, Y)$. Говорят, что s есть *струя сечения* (порядка k) отображения π, если s имеет вид $j_x^k(f)$, где f есть сечение класса C^r отображения π над открытой окрестностью точки x; это условие эквивалентно тому, что

$$j_{\mathfrak{b}(s)}^k(\pi) \circ s = j_x^k(\mathrm{Id}_X).$$

Через $P_x^k(\pi)$ (соотв. $P^k(\pi)$) обозначается множество струй $s \in J_x^k(X, Y)$ (соотв. $J^k(X, Y)$), которые суть струи сечений отображения π; это подмногообразие класса C^{r-k} в $J^k(X, Y)$. Отображения

$$\mathfrak{s}: P^k(\pi) \to X \text{ и } \mathfrak{b}: P^k(\pi) \to Y$$

суть субмерсии; если π является расслоением, они являются расслоениями. Если $k = 0$, $\mathfrak{b}$ есть изоморфизм, с помощью которого $P^0(\pi)$ отождествляется с Y.

Если $k' \leqslant k$, отображение $r^{k,k'}: J^k(X, Y) \to J^{k'}(X, Y)$ отображает $P^k(\pi)$ в $P^{k'}(\pi)$; отображение из $P^k(\pi)$ в $P^{k'}(\pi)$, определяемое отображением $r^{k,k'}$, есть расслоение класса C^{r-k}.

12.5.2. Пусть Z — многообразие класса C^r; предположим, что $Y = X \times Z$, и пусть $\pi = \mathrm{pr}_1$: $Y \to X$. Ограничение отображения $J^k(\mathrm{Id}_X, \mathrm{pr}_2)$ (см. 12.3.9) на $P^k(\pi)$ есть изоморфизм из $P^k(\pi)$ на $J^k(X, Z)$, с помощью которого эти два многообразия отождествляются.

12.5.3. Пусть Y' — многообразие класса C^r, π: $Y \to X$ и π': $Y' \to X$ — субмерсии и g: $Y \to Y'$ — такой морфизм, что $\pi' \circ g = \pi$. Отображение $J^k(\mathrm{Id}_X, g)$ определяет при ограничении отображение

$$P^k(g): P^k(\pi) \to P^k(\pi'),$$

принадлежащее классу C^{r-k}.

Пусть X' — многообразие класса C^r и f: $X' \to X$ — морфизм; положим $(Y', \pi') = f^*(Y, \pi)$; см. 5.11.5. Отображение $J^k(f, \mathrm{Id}_Y)$ (см. 12.3.9.) определяет отображение класса C^{r-k} из $f^* P^k(\pi)$ в $P^k(\pi')$.

12.6. Струи сечений векторного расслоения

12.6.1. Пусть E — векторное расслоение класса C^r с базой X и π — его проекция. Пусть $c_0 = (U, \varphi, F_0)$ — векторная карта на E и $c_1 = (U, \psi, F_1)$ — карта на многообразии X с той же областью определения U. Эти карты определяют биекцию θ из $P^k(\pi) \mid U$ на $J^k(\psi(U), F_0) = \psi(U) \times F_0 \times Q^k(F_1, F_0)$ (см. 12.2.2 и 12.3.1), откуда получаем векторную карту

$$d = (U, \theta, G), \text{ где } G = F_0 \times Q^k(F_1, F_0) = \prod_{m=0}^{k} P_m(F_1; F_0)$$

на $P^k(\pi)$. Получаемые таким путем карты образуют векторный C^{r-k}-атлас, который наделяет $P^k(\pi)$ структурой *векторного расслоения* класса C^{r-k} с базой X. Это векторное расслоение обозначается через $P^k(E)$; нижележащая структура многообразия совпадает с определенной в 12.5.1.

Пусть U — открытое подмножество в X и $f \in \mathscr{S}^r_E(U)$ — сечение класса C^r расслоения E над U. Отображение $j^k(f)\colon x \mapsto j^k_x(f)$ есть сечение класса C^{r-k} расслоения $P^k(E)$ над U. Отображение $j^k\colon \mathscr{S}^r_E(U) \to \mathscr{S}^{r-k}_{P^k(E)}(U)$ является K-линейным.

12.6.2. Если F — банахово пространство, то отождествление (12.5.2) многообразия $P^k(F_X)$ с $J^k(X, F)$ наделяет это последнее многообразие структурой векторного расслоения класса C^{r-k} с базой X. Если $F = K$, вместо $P^k(K_X)$ пишут $P^k(X)$.

Пример. Возьмем $X = K^n$ и обозначим через $u_1, \ldots, u_n$ координатные функции на K^n; тогда слой $P^k_0(X)$ расслоения $P^k(X)$ в 0 допускает в качестве базиса семейство струй порядка k одночленов $u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}$, где $m_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{n} m_i \leqslant k$.

12.6.3. Пусть d — целое число $\geqslant 0$, $E_1, \ldots, E_d$, F — векторные расслоения класса C^r с базой X, и пусть $u\colon E_1 \times_X \ldots \times_X E_d \to F$ — полилинейный морфизм (7.3.1) класса C^r. Тогда существует один и только один такой полилинейный морфизм

$$P^k(u)\colon P^k(E_1) \times_X \cdots \times_X P^k(E_d) \to P^k(F),$$

что

$$P^k(u)(j^k(s_1), \ldots, j^k(s_d)) = j^k(u(s_1, \ldots, s_d))$$

для всякого открытого в X подмножества U и всякой последовательности сечений $s_i \in \mathscr{S}^r_{E_i}(U)$ для $1 \leqslant i \leqslant d$.

Если A — расслоение на алгебры (7.3.2) с базой X, то морфизм из $P^k(A) \times_X P^k(A)$ в $P^k(A)$, определенный умножением $A \times_X A \to A$, превращает $P^k(A)$ в расслоение на алгебры; если A — расслоение на ассоциативные алгебры, то $P^k(A)$ есть расслоение на ассоциативные алгебры; если, кроме того, M есть расслоение на A-модули (7.3.3), то $P^k(M)$ является расслоением на $P^k(A)$-модули. В частности, $P^k(X)$ — *расслоение на алгебры*, которые ассоциативны, коммутативны и обладают единицей; если E — векторное расслоение, то $P^k(E)$ будет *расслоением на* $P^k(X)$-*модули*. Если u: $E \to F$ — морфизм векторных расслоений, то $P^k(u)$: $P^k(E) \to P^k(F)$ есть $P^k(X)$-гомоморфизм.

12.6.4. Если $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ — точная локально прямая последовательность векторных расслоений класса C^r с базой X, то такой же является последовательность

$$P^k(E) \to P^k(F) \to P^k(G),$$

где рассматриваемые гомоморфизмы суть $P^k(u)$ и $P^k(v)$.

12.6.5. Пусть k' и k'' — два положительных целых числа, сумма которых равна k, и E — векторное расслоение класса C^r с базой X. Морфизм

$$\alpha: J^k(X, E) \to J^{k''}(X, J^{k'}(X, E)) \qquad \text{(см. 12.3.8)}$$

индуцирует морфизм векторных расслоений

$$\beta: P^k(E) \to P^{k''}(P^{k'}(E)),$$

который принадлежит классу C^{r-k}. Если U — открытое в X подмножество и $f \in \mathscr{S}^r_E(U)$, то

$$\beta(j^k(f)) = j^{k''}(j^{k'}(f)).$$

Если K имеет характеристику нуль, то β — изоморфизм из $P^k(E)$ на векторное подрасслоение в $P^{k''}(P^{k'}(E))$.

12.6.6. Пусть k' — такое целое число, что $0 \leqslant k' \leqslant k$, и E — векторное расслоение класса C^r с базой X. Отображение

$$r^{k,k'}: P^k(E) \to P^{k'}(E)$$

является сюръективным локально прямым морфизмом класса C^{r-k}. Его ядро $N^{k,k'}(E)$ образовано струями сечений расслоения E, имеющих контакт порядка $\geqslant k'$ с нулевым сечением.

12.6.7. (*Векторный функтор* P_m.) В обозначениях из n°n° 7.6 — 7.8 положим $I_+ = \{0\}$, $I_- = \{1\}$, и пусть m — целое число $\geqslant 0$. Если $\mathscr{V} = (V_0, V_1)$ — пара банаховых пространств, обозначим через $\tau_m(\mathscr{V})$ банахово пространство $P_m(V_1; V_0)$ однородных *непрерывных многочленов* степени m на V_1 со значениями в V_0 (А. 2). Аналогично, если $\mathbf{f} = (f_0, f_1)$, где $f_0\colon V_0 \to V_0'$ и $f_1\colon V_1' \to V_1$ — морфизмы банаховых пространств, то пусть $\tau_m(\mathbf{f})$ — морфизм $p \mapsto f_0 \circ p \circ f_1$ из $P_m(V_1; V_0)$ в $P_m(V_1'; V_0')$. Получаем таким путем *векторный функтор* τ_m класса C^ω. Если E_0 и E_1 — два векторных расслоения с базой X, то через $P_m(E_1; E_0)$ обозначается векторное расслоение, получающееся из (E_0, E_1) применением τ_m (7.6.2).

12.6.8. Примем вновь обозначения и предположения из 12.6.1. Существует один и только один такой морфизм векторных расслоений

$$\iota\colon P_k(T(X); E) \to P^k(E) \qquad (\text{см. } 12.6.6),$$

что, каковы бы ни были векторная карта $c_0 = (U, \varphi, F_0)$ на E и карта $c_1 = (U, \psi, F_1)$ на X, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} P_k(T(X); E)\,|\,U & \xrightarrow{\iota|U} & P^k(E)\,|\,U \\ \eta\downarrow & & \downarrow\theta \\ U \times P_k(F_1; F_0) & \xrightarrow{i} & U \times \prod\limits_{m=0}^{k} P_m(F_1; F_0) \end{array}$$

здесь
1) $\iota\,|\,U$ — ограничение морфизма ι на $P_k(T(X); E)\,|\,U$;
2) θ — биекция, определенная в 12.6.1;
3) i — отображение $(u, p) \mapsto (u, 0, \ldots, 0, p)$;
4) η получается с помощью векторного функтора τ_k из векторной карты c_1' на $T(X)$ (см. 8.1.1) и векторной карты c_0 на E.

Морфизм ι есть *изоморфизм* расслоения $P_k(T(X); E)$ на векторное подрасслоение $N^{k,k-1}(E)$ в $P^k(E)$ (см. 12.6.6); последовательность

$$0 \to P_k(T(X); E) \xrightarrow{\iota} P^k(E) \xrightarrow{r^{k,k-1}} P^{k-1}(E) \to 0$$

является локально прямой *точной последовательностью* векторных расслоений.

Более общо, положим $N_0 = P^k(E)$, $N_m = N^{k,m-1}(E)$ для $m \geqslant 1$, так что N_m образуют убывающую последовательность векторных подрасслоений в $P^k(E)$:

$$P^k(E) = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_k \supset N_{k+1} = 0.$$

Для $0 \leqslant m \leqslant k$ проекция $r^{k,m}\colon P^k(E) \to P^m(E)$ определяет изоморфизм расслоения N_m/N_{m+1} на расслоение $N^{m,m-1}(E)$; в силу

изложенного выше получаем тем самым *изоморфизмы*

$$\iota_m: N_m/N_{m+1} \to P_m(T(X);\ E) \qquad (0 \leqslant m \leqslant k).$$

В частности, $N_0/N_1 \simeq E$ и $N_1/N_2 \simeq \mathscr{L}(T(X);\ E)$. Для $k = 1$ это дает точную последовательность

$$0 \to \mathscr{L}(T(X);\ E) \to P^1(E) \to E \to 0.$$

12.7. Ослабление структуры

Предполагается, что $K = \mathbf{R}$. Пусть $r' \in N_K$, причем $k \leqslant r' \leqslant r$, и пусть X' и Y' — многообразия класса $C^{r'}$, получаемые ослаблением структуры многообразий X и Y соответственно (5.13.1). Пусть $x \in X$ и $j \in J_x^k(X, Y)$; пусть U — открытое в X подмножество, содержащее x, и f — отображение класса C^k из U в Y, такое, что $j_x^k(f) = j$. Рассмотрим f как росток морфизма из X' в Y'; его струя $j' \in J_x^k(X', Y')$ зависит лишь от j. Отображение $j \mapsto j'$ есть изоморфизм класса $C^{r'-k}$ из $J^k(X, Y)$ на $J^k(X', Y')$; оно позволяет отождествить $J^k(X', Y')$ с многообразием класса $C^{r'-k}$, получаемым из многообразия $J^k(X, Y)$ класса C^{r-k} ослаблением структуры. Аналогичный результат справедлив для многообразий $P^k(\pi)$ и $P^k(E)$ из n°n° 12.5 и 12.6.

§ 13. Точечные распределения

13.1. Симметрические тензоры и банаховы пространства[1])

13.1.1. Пусть E — модуль над коммутативным кольцом A. Если n — целое число $\geqslant 0$, через $\mathsf{TS}^n(E)$ обозначается модуль *симметрических тензоров* степени n на E. (*Alg.*, chap. III, p. 71, и *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 2); прямая сумма модулей $\mathsf{TS}^n(E)$ обозначается через $\mathsf{TS}(E)$. Если r есть либо целое число, либо один из символов ∞, ω, то полагаем

$$\mathsf{TS}^{(r)}(E) = \bigoplus_{n \leqslant r} \mathsf{TS}^n(E) \text{ и } \mathsf{TS}^{(r)+}(E) = \bigoplus_{1 \leqslant n \leqslant r} \mathsf{TS}^n(E);$$

следовательно, если $r \geqslant 0$, то $\mathsf{TS}^{(r)}(E)$ есть прямая сумма модулей $\mathsf{TS}^{(0)}(E) = A$ и $\mathsf{TS}^{(r)+}(E)$. Имеем $\mathsf{TS}^{(1)+}(E) = E$ и $\mathsf{TS}^{(\infty)}(E) = \mathsf{TS}^{(\omega)}(E) = \mathsf{TS}(E)$.

Если n — целое число $\geqslant 0$ и если $x \in E$, через $\gamma_n(x)$ обозначается элемент $x \otimes \ldots \otimes x$ в $\mathsf{TS}^n(E)$; для $n = 0$ полагаем $\gamma_0(x) = 1$.

13.1.2. (*Полиномиальные отображения.*) Предполагается, что A — бесконечное кольцо целостности и что E есть свободный A-модуль. Пусть F есть A-модуль. Отображение f: $E \to F$ называется

---

[1]) Вот несколько замечаний по поводу симметрических тензоров, материал о которых отсутствует в переведенном издании *Алгебры*. Мы будем пользоваться обозначениями и определениями из пп. 13.1.1—13.1.3. Пусть k — бесконечное поле и E — векторное k-пространство. Пространство $\mathsf{TS}^n(E)$ симметрических тензоров n-й степени можно определить как подпространство в $\bigotimes^n E$, натянутое на тензоры вида $\gamma_n(x)$, где $x \in E$, или, что то же самое, как подпространство тензоров, инвариантных относительно естественного действия на $\bigotimes^n E$ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$.

Симметрическое произведение tt' элементов t, t' из $\mathsf{TS}(E) = \bigoplus \mathsf{TS}^n(E)$ однозначно определяется из следующего условия: если $f: x \to f(x)$ — полиномиальное отображение (т. е. сумма нескольких однородных полиномиальных отображений) из E в некоторое векторное k-пространство, то

$$\langle f, tt' \rangle = \langle x' \mapsto \langle x \mapsto f(x + x'), t \rangle, t' \rangle = \\ = \langle x \mapsto \langle x' \mapsto f(x + x'), t' \rangle, t \rangle.$$

Отображение $(t, t') \to tt'$ переводит $\mathsf{TS}^n(E) \times \mathsf{TS}^{n'}(E)$ в $\mathsf{TS}^{n+n'}(E)$ и наделяет $\mathsf{TS}(E)$ структурой коммутативной ассоциативной алгебры.— *Прим. перев.*

однородным полиномиальным отображением степени n, если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям (см. *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 9):

a) Существует такое линейное отображение $\tilde{f}$: $\mathrm{TS}^n(E) \to F$, что $f(x) = \tilde{f}(\gamma_n(x))$ для всякого $x \in E$.

b) Существует такое полилинейное отображение u: $E^n \to F$, что $f(x) = u(x, \ldots, x)$ для всякого $x \in E$.

Предположим, что это так. Отображение $\tilde{f}$, удовлетворяющее условию a), тогда единственно; если $t \in \mathrm{TS}^n(E)$, то через $\langle f, t\rangle$ обозначается элемент $\tilde{f}(t)$. Если u: $E^n \to F$ удовлетворяет условию b), то соответствующее линейное отображение из $\bigotimes^n E$ в F совпадает с $\tilde{f}$ на подмодуле $\mathrm{TS}^n(E)$. Если $n!$ обратим в A, можно выбрать u симметрическим, причем это делается единственным образом.

13.1.3. Пусть E — банахово пространство над K и F — отделимое полинормированное пространство над K. Пусть U — открытая окрестность точки 0 в E, f: $U \to F$ — отображение класса C^r ($r \in \in N_K$) и t — элемент из $\mathrm{TS}^{(r)}(E)$; см. 13.1.1 (применительно к кольцу $A = K$). Пусть k — такое целое число $\leqslant r$, что $t \in \in \mathrm{TS}^{(k)}(E)$. Можно разложить t и f единственным образом так, что

$$t = t_0 + \cdots + t_k, \qquad t_i \in \mathrm{TS}^i(E)$$

и

$$f = f_0 + \cdots + f_k + h,$$

где f_i — однородный непрерывный многочлен степени i $(0 \leqslant i \leqslant k)$ и где h имеет контакт порядка $\geqslant k$ с 0 в точке 0. Полагаем тогда

$$\langle f, t\rangle = \sum_{i=0}^{k} \langle f_i, t_i\rangle;$$

это элемент из F, который не зависит от выбора k.

13.1.4. Пусть E и E' — два банаховых пространства, U — открытая окрестность точки 0 в E и φ: $U \to E'$ — такое отображение класса C^r, что $\varphi(0) = 0$. Пусть $t \in \mathrm{TS}^{(r)}(E)$. Существует один и только один такой элемент $t' \in \mathrm{TS}^{(r)}(E')$, что, каковы бы ни были отделимое полинормированное пространство F, открытая окрестность U' точки 0 в E' и отображение f: $U' \to F$ класса C^r, выполняется

$$(*) \qquad \langle f, t'\rangle = \langle f \circ \varphi, t\rangle.$$

Этот элемент t' обозначается через $\varphi_*(t)$. Отображение

$$\varphi_*\colon \mathrm{TS}^{(r)}(E) \to \mathrm{TS}^{(r)}(E'),$$

определенное таким способом, линейно.

13.2. Точечные распределения

В этом пункте X означает многообразие класса C^r, а x — точку в X.

13.2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — множество пар (c, t), где $c = (U, \varphi, E)$ — карта на X, центрированная в x, и где $t \in \mathsf{TS}^{(r)}(E)$. Два элемента $((U, \varphi, E), t)$ и $((U', \varphi', E'), t')$ из $\mathcal{A}$ называются эквивалентными, если $t' = \gamma_*(t)$, где $\gamma = \varphi' \circ \varphi^{-1}$. Получаем, таким образом, отношение эквивалентности на $\mathcal{A}$; класс эквивалентности этого отношения называется *точечным распределением* в x на X.

Пусть $T_x^{(r)}(X)$ — множество точечных распределений в x на X. Если c — карта на X, центрированная в x, то отображение

$$\theta_c\colon \mathsf{TS}^{(r)}(E) \to T_x^{(r)}(X),$$

которое элементу t ставит в соответствие класс пары (c, t), есть биекция. Всюду в дальнейшем $T_x^{(r)}(X)$ наделяется структурой векторного K-пространства, полученной переносом этой структуры на $\mathsf{TS}^{(r)}(E)$ посредством θ_c; эта структура не зависит от выбора c. Аналогично, если $k \leqslant r$, через $T_x^{(k)}(X)$ и $T_x^{(k)+}(X)$ обозначаются образы относительно θ_c пространств $\mathsf{TS}^{(k)}(E)$ и $\mathsf{TS}^{(k)+}(E)$; они не зависят от выбора c. Говорят, что элемент из $T_x^{(r)}(X)$ *имеет порядок* $\leqslant k$, если он принадлежит $T_x^{(k)}(X)$. Тогда

$$T_x^{(k)}(X) = T_x^{(0)}(X) \oplus T_x^{(k)+}(X).$$

Существует один и только один такой элемент ε_x в $T_x^{(0)}(X)$, что $\theta_c(1) = \varepsilon_x$ для всякой карты c на X, центрированной в x. Если t — точечное распределение в x, то *свободным членом* распределения t называется такой элемент λ в K, что $t - \lambda\varepsilon_x \in T_x^{(r)+}(X)$; говорят, что t *не имеет свободного члена,* если его свободный член равен нулю.

13.2.2. Пусть F — отделимое полинормированное пространство и f — функция класса C^r со значениями в F, определенная в окрестности точки x. Пусть t — точечное распределение в x на X. Рассмотрим карту $c = (U, \varphi, E)$ на X, центрированную в x, и положим $f_c = f \circ \varphi^{-1}$ и $t_c = \theta_c^{-1}(t)$; элемент $\langle f_c, t_c \rangle$ из F, определенный в 13.1.3, не зависит от выбора c; он обозначается через $\langle f, t \rangle$. Имеем $\varepsilon_x(f) = f(x)$[1]. Свободный член распределения t равен $\langle 1, t \rangle$.

[1] Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и X локально компактно, предыдущая формула приводит к отождествлению точечного распределения ε_x с *мерой Дирака* ε_x, определенной в *Int.*, chap. III, § 1, n° 3. [См. также *Интегр.*, гл. III, § 1, n° 2.— *Перев.*] Более общо, всякая мера с конечным носителем на X отождествляется с распределением с конечным носителем в смысле n° 13.6.

Если F' — отделимое полинормированное пространство и $u\colon F \to F'$ линейно и непрерывно, то $\langle u \circ f,\ t\rangle = u(\langle f,\ t\rangle)$.

Предположим, что F — банахово пространство и что t имеет порядок $\leqslant k$, где k конечно. Пусть $j \in J_x^k(X,\ F)$ (см. 12.1.2), и пусть $f \in j$. Тогда элемент $\langle f,\ t\rangle$ зависит только от *струи* j; он обозначается через $\langle j,\ t\rangle$. Отображение из $T_x^{(k)}(X) \times J_x^k(X,\ F)$ в F, определенное таким способом, билинейно. Если $F = K$, мы полагаем $J_x^k(X,\ F) = P_x^k(X)$ (см. 12.6.2) и получаем *билинейную форму* на $T_x^{(k)}(X) \times P_x^k(X)$.

13.2.3. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, и пусть $y = \varphi(x)$. Пусть $c = (U,\ \psi,\ E)$ — карта на X, центрированная в x, и $c' = (U',\ \psi',\ E')$ — карта на Y, центрированная в y; пусть $\tilde{\varphi}$ — представление отображения φ в этих картах (5.3.2), и пусть $\tilde{\varphi}_*$ — соответствующее отображение из $\mathrm{TS}^{(r)}(E)$ в $\mathrm{TS}^{(r)}(E')$ (см. 13.1.4). Существует одно и только одно линейное отображение, обозначаемое через $T_x^{(r)}(\varphi)$ или φ_*, из $T_x^{(r)}(X)$ в $T_y^{(r)}(Y)$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TS}^{(r)}(E) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \mathrm{TS}^{(r)}(E') \\ {\scriptstyle\theta_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_{c'}} \\ T_x^{(r)}(X) & \xrightarrow{\varphi_*} & T_y^{(r)}(Y). \end{array}$$

Это отображение не зависит от выбора c и c'. Если $t \in T_x^{(r)}(X)$, говорят, что $\varphi_*(t)$ есть *образ* элемента t относительно φ. Имеем $\varphi_*(\varepsilon_x) = \varepsilon_y$. Если $k \leqslant r$, то

$$\varphi_*(T_x^{(k)}(X)) \subset T_y^{(k)}(Y) \text{ и } \varphi_*(T_x^{(k)+}(X)) \subset T_y^{(k)+}(Y).$$

Если $\varphi'\colon X \to Y$ — морфизм класса C^r, отображающий x в y, то $\varphi_* = \varphi'_*$ тогда и только тогда, когда $j_x^r(\varphi) = j_x^r(\varphi')$ (см. 12.1).

Если φ — иммерсия (соотв. субмерсия) в x, то φ_* инъективно (соотв. сюръективно); обратное справедливо, если $\dim_y Y < +\infty$.

Если $\varphi'\colon Y \to Z$ — морфизм многообразий класса C^r и $t \in T_x^{(r)}(X)$, то $(\varphi' \circ \varphi)_*(t) = \varphi'_*(\varphi_*(t))$.

Пусть F — отделимое полинормированное пространство и f — функция класса C^r со значениями в F, определенная в окрестности точки y. Тогда

(1) $\langle f,\ \varphi_*(t)\rangle = \langle f \circ \varphi,\ t\rangle$ для всякого $t \in T_x^{(r)}(X)$.

Для данного t соотношения (1) (при переменных f и F) *характеризуют* $\varphi_*(t)$; если $\dim_y Y < +\infty$, можно ограничиться случаем $F = K$.

13.2.4. Предположим, что X — открытое подмногообразие *банахова пространства* E. Обозначим через φ_x отображение $y \mapsto y - x$ из X в E; карта $c = (X, \varphi_x, E)$ центрирована в x. Тогда $T_x^{(r)}(X)$ и $\mathsf{TS}^{(r)}(E)$ *отождествляются* с помощью θ_c^{-1}; в частности, $T_x^{(\infty)}(X) = \mathsf{TS}(E)$.

Пусть F — банахово пространство, u: $E \to F$ — непрерывное линейное отображение и $x \in E$, $y \in F$ таковы, что $u(x) = y$. Отождествим, как и выше, $T_x^{(\infty)}(E)$ с $\mathsf{TS}(E)$ и $T_y^{(\infty)}(F)$ с $\mathsf{TS}(F)$. Отображение

$$u_* : \mathsf{TS}(E) \to \mathsf{TS}(F) \qquad \text{(см. 13.2.3)}$$

совпадает с отображением $\mathsf{TS}(u)$, индуцированным каноническим продолжением отображения u на тензорную алгебру.

13.2.5. Если $k \leqslant r$, через $T^{(k)}(X)$ (соотв. $T^{(k)+}(X)$) обозначается множество, являющееся суммой множеств $T_a^{(k)}(X)$ (соотв. множеств $T_a^{(k)+}(X)$) для $a \in X$. Отображение t: $X \to T^{(k)}(X)$, такое, что $t(a) \in T_a^{(k)}(X)$ для всякого $a \in X$, называется *полем точечных распределений порядка* $\leqslant k$.

Предположим, что k *конечно* и что X локально *конечномерно*. Для всякого $a \in X$ билинейная форма $(j, t) \mapsto \langle j, t\rangle$ (см. 13.2.2) определяет изоморфизм i_a из $T_a^{(k)}(X)$ на сопряженное к $P_a^k(X)$ пространство $P_a^k(X)^*$. Изоморфизмы i_a дают биекцию i: $T^{(k)}(X) \to P^k(X)^*$, где $P^k(X)^*$ обозначает сопряженное к $P^k(X)$ векторное расслоение; с помощью переноса структуры посредством биекции i^{-1} множество $T^{(k)}(X)$ наделяется *структурой векторного расслоения класса* C^{r-k} *с базой* X. Говорят, что поле точечных распределений порядка $\leqslant k$ принадлежит классу C^s, где $s \leqslant r - k$, если оно есть сечение класса C^s расслоения $T_a^{(k)}(X)$.

Пусть φ: $X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, и предположим, что Y, подобно X, локально конечномерно. Тогда φ_*: $T^{(k)}(X) \to T^{(k)}(Y)$ есть φ-морфизм векторных расслоений класса C^{r-k}.

13.2.6. Пусть k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant r$. Если U — открытое подмножество конечномерного банахова пространства E, то векторное расслоение $T^{(k)}(U)$ отождествляется, согласно 13.2.4, с *тривиальным расслоением* со слоем $\mathsf{TS}^{(k)}(E)$.

Возьмем, в частности, $E = K^n$, где $n \geqslant 0$, и пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — канонический базис в E. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — элемент в $\mathbf{N}^n$, обозначим через Δ^α элемент $\gamma_{\alpha_1}(e_1) \ldots \gamma_{\alpha_n}(e_n)$ в $\mathsf{TS}(E)$ (используемое произведение есть *симметрическое произведение* симметриче-

ских тензоров; см. *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 3) [1]). Элементы Δ^α для $|\alpha| \leqslant k$ образуют *базис* в $\mathsf{TS}^{(k)}(E)$; если $a \in K^n$, через Δ^α_a обозначаются соответствующие элементы в $T^{(k)}_a(E)$. Пусть F — отделимое полинормированное пространство и f — функция класса C^r со значениями в F, определенная в окрестности точки a; если $\alpha \in \mathbf{N}^n$, то элемент $\langle f, \Delta^\alpha_a\rangle$ совпадает с элементом $(\Delta^\alpha f)(a)$, определенным в 2.5.3, 3. 2.1 и 4.2.1.

Предположим, что X локально компактно и конечномерно, и пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — система координат на X в открытом подмножестве U. Если $a \in U$ и если α — такой мультииндекс, что $|\alpha| \leqslant k$, через $(\Delta^\alpha_\xi)_a$ обозначается точечное распределение в a, образ которого относительно ξ есть точечное распределение $\Delta^\alpha_{\xi(a)}$ на K^n; поля распределений

$$\Delta^\alpha_\xi : a \mapsto (\Delta^\alpha_\xi)_a \qquad (|\alpha| \leqslant k)$$

образуют *репер* векторного расслоения $T^{(k)}(X)$ над U. Если $f: V \to F$ принадлежит классу C^r, полагают $\langle f, (\Delta^\alpha_\xi)_a\rangle = \Delta^\alpha_\xi f\ (a)$ и обозначают через $\Delta^\alpha_\xi f$ функцию $a \mapsto \Delta^\alpha_\xi f(a)$; это функция класса C^{r-k} на U.

13.3. Точечные распределения и касательные пространства

В этом пункте X означает многообразие класса C^r.

13.3.1. Пусть $x \in X$, и пусть k — целое число $\leqslant r$. Пусть $c = (U, \varphi, E)$ — карта на X, центрированная в x; изоморфизм $\theta_c: \mathsf{TS}^{(r)}(E) \to T^{(r)}_x(X)$, определенный в 13.2.1, отображает $\mathsf{TS}^{(k)}(E)$ на $T^{(k)}_x(X)$ и $\mathsf{TS}^{(k-1)}(E)$ на $T^{(k-1)}_x(X)$; в результате ограничения и перехода к фактору он индуцирует изоморфизм

$$\theta_{c,k}: \mathsf{TS}^k(E) = \mathsf{TS}^{(k)}(E)/\mathsf{TS}^{(k-1)}(E) \to T^{(k)}_x(X)/T^{(k-1)}_x(X).$$

С другой стороны, c индуцирует изоморфизм, уже обозначавшийся через θ_c, из E на касательное пространство $T_x(X)$; см. 5.5.1. Обозначим через i_k композицию

$$T^{(k)}_x(X)/T^{(k-1)}_x(X) \xrightarrow{\theta^{-1}_{c,k}} \mathsf{TS}^k(E) \xrightarrow{\mathsf{TS}^k(\theta_c)} \mathsf{TS}^k(T_x(X)).$$

---

[1]) Если $m = |\alpha|$ и если Σ есть множество таких отображений σ из $\{1, \ldots, m\}$ в $\{1, \ldots, n\}$, что $\operatorname{Card}\sigma^{-1}(i) = \alpha_i$, то

$$\Delta^\alpha = \gamma_{\alpha_1}(e_1) \ldots \gamma_{\alpha_n}(e_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma} e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(m)}$$

(см. *Alg.*, chap. IV, § 5, n°4).

Изоморфизм i_k *не зависит от выбора* c; при $k=1$ его используют для отождествления $T_x^{(1)+}(X) = T_x^{(1)}(X)/T_x^{(0)}(X)$ с касательным пространством $T_x(X)$. Если $t \in T_x^{(k)}(X)$, мы позволим себе обозначить через $i_k(t)$ образ при i_k класса элемента t по модулю $T_x^{(k-1)}(X)$.

Положим

$$\mathrm{gr}_k T_x^{(r)}(X) = T_x^{(k)}(X)/T_x^{(k-1)}(X) \text{ и } \mathrm{gr}\, T_x^{(r)}(X) = \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant r} \mathrm{gr}_k T_x^{(r)}(X).$$

Говорят, что $\mathrm{gr}\, T_x^{(r)}(X)$ есть *градуированное векторное пространство, ассоциированное* с возрастающей фильтрацией $(T_x^{(k)}(X))_{k \leqslant r}$ пространства $T_x^{(r)}(X)$. Изоморфизмы i_k определяют *изоморфизм* градуированных векторных пространств

$$i\colon \mathrm{gr}\, T_x^{(r)}(X) \to \mathrm{TS}^{(r)}(T_x(X)).$$

Если $r=\infty$ или ω, то i есть изоморфизм из $\mathrm{gr}\, T_x^{(r)}(X)$ на $\mathrm{TS}(T_x(X))$. Если хотят указать x (или X, или и x и X), вместо i пишут i_x (или i_X, или $i_{X,x}$).

13.3.2. Помимо указанных выше допущений, предположим, что *X локально конечномерно*. Изоморфизмы i_k, относящиеся к различным точкам из X, определяют *изоморфизм векторных расслоений*

$$i_k\colon T^{(k)}(X)/T^{(k-1)}(X) \to \mathrm{TS}^k(T(X)),$$

где $\mathrm{TS}^k(T(X))$ означает векторное расслоение класса C^{r-1}, получаемое из $T(X)$ посредством векторного функтора в конечной размерности TS^k (см. 7.6.5). Для $k \geqslant 1$ изоморфизм i_k есть изоморфизм класса C^{r-k}; для $k=0$ это тождественное отображение тривиального расслоения K_X.

13.3.3. *Пример.* При тех же предположениях, что и выше, пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — система координат на X в x. Обозначим через $(\partial_{i,x})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ базис в $T_x(X)$, определенный системой координат ξ (см. 5.5.8), и обозначим через $((\Delta_\xi^\alpha)_x)_{|\alpha| \leqslant k}$ базис в $T_x^{(k)}(X)$, определенный в 13.2.6. Тогда

$$i_k((\Delta_\xi^\alpha)_x) = 0, \text{ если } |\alpha| < k,$$
$$i_k((\Delta_\xi^\alpha)_x) = \gamma_{\alpha_1}(\partial_{1,x}) \ldots \gamma_{\alpha_n}(\partial_{n,x}), \text{ если } |\alpha| = k\,^{1)}.$$

---

[1]) Здесь также произведение элементов $\gamma_{\alpha_i}(\partial_{i,x})$ есть *симметрическое произведение* в $\mathrm{TS}(T_x(X))$.

13.3.4. Предположим, что либо K имеет характеристику нуль, либо X локально конечномерно. Пусть k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant r$, и $x \in X$; пусть F — банахово пространство. В силу 12.6.8 получаем точную последовательность

$$\text{(i)} \qquad 0 \to P_k(T_x(X);\ E) \xrightarrow{\iota} P_x^k(F_X) \xrightarrow{\sigma} P_x^{k-1}(F_X) \to 0,$$

где $\sigma = r^{k,k-1}$. С другой стороны, в силу 13.3.1 получаем точную последовательность

$$\text{(ii)} \qquad 0 \leftarrow \mathsf{TS}^k(T_x(X)) \xleftarrow{i} T_x^{(k)}(X) \xleftarrow{s} T_x^{(k-1)}(X) \leftarrow 0,$$

где s — вложение пространства $T_x^{(k-1)}(X)$ в $T_x^{(k)}(X)$ и $i = i_k$. Для этих точных последовательностей существует «спаривание со значениями в F». Более точно, запишем их в виде

$$\text{(i)} \qquad 0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0,$$

$$\text{(ii)} \qquad 0 \leftarrow A' \xleftarrow{i} B' \xleftarrow{s} C' \leftarrow 0.$$

Если $a \in A$ и $a' \in A'$, то элемент $\langle a, a' \rangle$ из F определен в 13.1.2; если $b \in B$ и $b' \in B'$ (соотв. $c \in C$ и $c' \in C'$), то элемент $\langle b, b' \rangle$ (соотв. $\langle c, c' \rangle$) из F определен в 13.2.2; тогда

$$\langle \iota a,\ b' \rangle = \langle a,\ ib' \rangle \text{ и } \langle \sigma b,\ c' \rangle = \langle b,\ sc' \rangle,$$

$$\text{если } a \in A,\ b \in B,\ b' \in B,\ c' \in C'.$$

13.3.5. Пусть Y — многообразие класса C^r, пусть $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм класса C^r и $x \in X$, $y \in Y$ таковы, что $y = \varphi(x)$. Отображение $\varphi_*\colon T_x^{(r)}(X) \to T_y^{(r)}(Y)$, определенное в 13.2.3, согласовано с фильтрацией этих пространств; при переходе к связанной с этой фильтрацией градуировке оно определяет линейное отображение

$$\operatorname{gr}(\varphi_*)\colon \operatorname{gr} T_x^{(r)}(X) \to \operatorname{gr} T_y^{(r)}(Y).$$

Обозначим, с другой стороны, через $\mathsf{TS}^{(r)}(T_x(\varphi))$ отображение из $\mathsf{TS}^{(r)}(T_x(X))$ в $\mathsf{TS}^{(r)}(T_y(Y))$, индуцированное каноническим продолжением $\mathsf{TS}(T_x(\varphi))$ отображения $T_x(\varphi)$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{gr} T_x^{(r)}(X) & \xrightarrow{\operatorname{gr}(\varphi_*)} & \operatorname{gr} T_y^{(r)}(Y) \\
\downarrow i_{X,x} & & \downarrow i_{Y,y} \\
\mathsf{TS}^{(r)}(T_x(X)) & \xrightarrow{\mathsf{TS}^{(r)}(T_x(\varphi))} & \mathsf{TS}^{(r)}(T_y(Y))
\end{array}$$

коммутативна.

13.3.6. Предположим, что K имеет *характеристику нуль*. Используя изоморфизмы $\varphi_M\colon \mathsf{S}^k(M) \to \mathsf{TS}^k(M)$, определенные в *Alg.*,

chap. IV, § 5, n° 8, в предыдущем изложении можно всюду заменить пространства $\mathsf{TS}^k(T_x(X))$ на *k-е симметрические степени* $\mathsf{S}^k(T_x(X))$ *касательного пространства* $T_x(X)$.

13.4. Тензорное произведение точечных распределений

13.4.1. Пусть X_1 и X_2 — два многообразия класса C^r, пусть $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ и $t_1 \in T_{x_1}^{(k_1)}(X_1)$, $t_2 \in T_{x_2}^{(k_2)}(X_2)$, где $k_1 + k_2 \leqslant r$. Положим $X = X_1 \times X_2$, $x = (x_1, x_2)$ и $k = k_1 + k_2$. Для $i = 1, 2$ пусть $c_i = (U_i, \varphi_i, E_i)$ — карта на X_i, центрированная в x_i, и обозначим через $\tilde{t}_i$ такой элемент в $\mathsf{TS}(E_i)$, что $\theta_c(\tilde{t}_i) = t_i$ (см. 13.2.1). Пусть σ — канонический изоморфизм из $\mathsf{TS}(E_1) \otimes \mathsf{TS}(E_2)$ на $\mathsf{TS}(E_1 \times E_2)$ (см. *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 5). Элемент $\sigma(\tilde{t}_1 \otimes \tilde{t}_2)$ есть *симметрическое произведение* элементов $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ (отождествляемых с элементами из $\mathsf{TS}(E_1 \times E_2)$) согласно каноническим инъекциям $\mathsf{TS}(E_i) \to \mathsf{TS}(E_1 \times E_2)$; он принадлежит $\mathsf{TS}^{(k)}(E_1 \times E_2)$. Положим $c = c_1 \times c_2$; это карта на X, центрированная в x. Образ элемента $\sigma(\tilde{t}_1 \otimes \tilde{t}_2)$ относительно θ_c есть элемент из $T_x^{(k)}(X)$, который не зависит от выбора карт c_i. Он называется *прямым произведением* или *симметрическим тензорным произведением* (или просто *тензорным произведением*) элементов t_1 и t_2 и обозначается через $t_1 \times t_2$ или $t_1 \otimes t_2$.

Имеем $\varepsilon_{x_1} \otimes \varepsilon_{x_2} = \varepsilon_x$. Свободный член элемента $t_1 \otimes t_2$ равен произведению свободных членов элементов t_1 и t_2.

Изоморфизм $(y_1, y_2) \mapsto (y_2, y_1)$ из $X_1 \times X_2$ на $X_2 \times X_1$ преобразует $t_1 \otimes t_2$ в $t_2 \otimes t_1$.

13.4.2. (*Ассоциативность и функториальность.*) Пусть X_i ($i = 1, 2, 3$) — многообразия класса C^r и $x_i \in X_i$, $t_i \in T_{x_i}^{(k_i)}(X_i)$, где $k_1 + k_2 + k_3 \leqslant r$. Имеем

$$(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3);$$

это точечное распределение обозначается через $t_1 \otimes t_2 \otimes t_3$. Аналогично определяются произвольные конечные тензорные произведения.

Пусть $\varphi_1\colon X_1 \to Y_1$ и $\varphi_2\colon X_2 \to Y_2$ — морфизмы многообразий класса C^r, и пусть $t_1 \in T_{x_1}^{(k_1)}(X_1)$, $t_2 \in T_{x_2}^{(k_2)}(X_2)$, где $k_1 + k_2 \leqslant r$. Имеем

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)_*(t_1 \otimes t_2) = \varphi_{1*}(t_1) \otimes \varphi_{2*}(t_2).$$

13.4.3. В обозначениях из 13.4.1 пусть F_1, F_2 и F — отделимые полинормированные пространства и $(u_1, u_2) \mapsto u_1 . u_2$ — непрерывное

билинейное отображение из $F_1 \times F_2$ в F. Пусть

$$f_i\colon X_i \to F_i \qquad (i = 1,\ 2)$$

— отображение класса C^r, и определим $f_1 \otimes f_2\colon\ X \to F$ формулой

$$(f_1 \otimes f_2)(y_1,\ y_2) = f_1(y_1) \cdot f_2(y_2).$$

Отображение $f_1 \otimes f_2$ принадлежит классу C^r и

$$\langle f_1 \otimes f_2,\ t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle f_1,\ t_1 \rangle \cdot \langle f_2,\ t_2 \rangle.$$

13.4.4. В обозначениях из 13.4.1 пусть f — отображение класса C^r из X в отделимое полинормированное пространство F. Если $y_1 \in X_1$, обозначим через f_{y_1} отображение $y_2 \mapsto f(y_1,\ y_2)$ из X_2 в F и положим $g(y_1) = \langle f_{y_1},\ t_2 \rangle$. Функция $g\colon\ X_1 \to F$, определенная таким способом, принадлежит классу C^{r-k_1} и

$$\langle f,\ t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle g,\ t_1 \rangle;$$

другими словами,

$$\langle f,\ t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle y_1 \mapsto \langle y_2 \mapsto f(y_1,\ y_2),\ t_2 \rangle,\ t_1 \rangle.$$

Аналогично

$$\langle f,\ t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle y_2 \mapsto \langle y_1 \mapsto f(y_1,\ y_2),\ t_1 \rangle,\ t_2 \rangle.$$

13.4.5. В обозначениях из 13.4.1 пусть

$$\alpha_{k_1, k_2}\colon T_{x_1}^{(k_1)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(k_2)}(X_2) \to T_x^{(k)}(X)$$

— линейное отображение, определенное билинейным отображением $(t_1,\ t_2) \mapsto t_1 \otimes t_2$; это отображение *инъективно;* оно биективно, если k_1 и k_2 бесконечны.

Если $n \leqslant r$, обозначим через $T_x^{(n)}(X_1,\ X_2)$ векторное подпространство в $T_{x_1}^{(n)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(n)}(X_2)$, порожденное подпространствами $T_{x_1}^{(k_1)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(k_2)}(X_2)$ для $k_1 + k_2 \leqslant n$. Существует одно и только одно линейное отображение

$$\alpha_n\colon T_x^{(n)}(X_1,\ X_2) \to T_x^{(n)}(X),$$

которое продолжает определенные выше отображения α_{k_1, k_2}; это отображение является изоморфизмом. В дальнейшем $T_x^{(n)}(X)$ отождествляется при помощи α_n^{-1} с векторным подпространством $T_x^{(n)}(X_1,\ X_2)$ в $T_{x_1}^{(n)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(n)}(X_2)$.

13.4.6. Сохраним обозначения из 13.4.5 и 13.3.1. При переходе к фактору α_{k_1, k_2} определяет линейное отображение

$$\varepsilon_{k_1, k_2}\colon \mathrm{gr}_{k_1} T_{x_1}^{(r)}(X_1) \otimes \mathrm{gr}_{k_2} T_{x_2}^{(r)}(X_2) \to \mathrm{gr}_k T_x^{(r)}(X).$$

Отображения ε_{k_1,k_2} $(k_1+k_2 \leqslant r)$ суть компоненты градуированного степени нуль линейного отображения

$$\varepsilon: \bigoplus_{k_1+k_2 \leqslant r} (\mathrm{gr}_{k_1} T_{x_1}^{(r)}(X_1) \otimes \mathrm{gr}_{k_2} T_{x_2}^{(r)}(X_2)) \to \bigoplus_{k \leqslant r} \mathrm{gr}_k T_x^{(r)}(X),$$

являющегося *изоморфизмом*. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus\limits_{k_1+k_2 \leqslant r} (\mathrm{gr}_{k_1} T_{x_1}^{(r)}(X_1) \otimes \mathrm{gr}_{k_2} T_{x_2}^{(r)}(X_2)) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{gr}\, T_x^{(r)}(X) \\
\downarrow i_{12} & & \downarrow i_X \\
\bigoplus\limits_{k_1+k_2 \leqslant r} (\mathsf{TS}^{k_1}(T_{x_1}(X_1)) \otimes \mathsf{TS}^{k_2}(T_{x_2}(X_2))) & \xrightarrow{\sigma} & \bigoplus\limits_{k \leqslant r} \mathsf{TS}^k (T_{x_1}(X_1) \times T_{x_2}(X_2))
\end{array}$$

коммутативна (в этой диаграмме i_{12} означает гомоморфизм, индуцированный отображением $i_{X_1} \otimes i_{X_2}$, и σ — изоморфизм, определенный в *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 5). Если r бесконечно, то эта диаграмма записывается просто в таком виде:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{gr}\, T_{x_1}^{(\infty)}(X_1) \otimes \mathrm{gr}\, T_{x_2}^{(\infty)}(X_2) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{gr}\, T_x^{(\infty)}(X) \\
\downarrow i_{X_1} \otimes i_{X_2} & & \downarrow i_X \\
\mathsf{TS}(T_{x_1}(X_1)) \otimes \mathsf{TS}(T_{x_2}(X_2)) & \xrightarrow{\sigma} & \mathsf{TS}(T_x(X))
\end{array}$$

13.5. Копроизведения

В этом пункте X означает многообразие класса C^r, а x — точку в X.

13.5.1. Пусть $k \leqslant r$. Если Δ — диагональное отображение $y \mapsto (y, y)$ из X в $X \times X$, то Δ_* отображает $T_x^{(k)}(X)$ в $T_{(x,x)}^{(k)}(X \times X)$, являющееся векторным подпространством в $T_x^{(k)}(X) \otimes T_x^{(k)}(X)$ (см. 13.4.5). Таким образом получаем линейное отображение, также обозначаемое через Δ_* (или c),

$$T_x^{(k)}(X) \to T_x^{(k)}(X) \otimes T_x^{(k)}(X);$$

оно называется *копроизведением*, связанным с $T_x^{(k)}(X)$. Будучи наделено этим копроизведением, $T_x^{(k)}(X)$ становится коассоциативной и кокоммутативной коалгеброй (*Alg.*, chap. III, p. 144—145); эта коалгебра допускает в качестве коединицы линейную форму, сопоставляющую точечному распределению его свободный член (13.2.1). Если $k' \leqslant k$, вложение из $T_x^{(k')}(X)$ в $T_x^{(k)}(X)$ есть морфизм коалгебр.

Если $c = (U, \varphi, E)$ — карта на X, центрированная в x, то изоморфизм

$$\theta_c : T^{(k)}(E) \to T_x^{(k)}(X)$$

есть изоморфизм коалгебр, если $T^{(k)}(E)$ наделено копроизведением, индуцированным копроизведением в $\mathsf{TS}(E)$ (см. *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 7).

Если φ: $X \to Y$ — морфизм многообразий класса C^r, то отображение из $T_x^{(k)}(X)$ в $T_{\varphi(x)}^{(k)}(Y)$, индуцированное отображением φ_*, есть морфизм коалгебр.

13.5.2. Пусть F_1, F_2 и F — отделимые полинормированные пространства и $(u_1, u_2) \mapsto u_1 \,.\, u_2$ — непрерывное билинейное отображение из $F_1 \times F_2$ в F. Пусть $t \in T_x^{(r)}(X)$, и пусть $c(t) = \sum_j u_j \otimes \otimes v_j$ (u_j, v_j лежат в $T_x^{(r)}(X)$) — его образ относительно копроизведения. Пусть f_i: $X \to F_i$ $(i = 1, 2)$ — отображения класса C^r. Имеем

$$\langle f_1 . f_2,\ t\rangle = \sum_j \langle f_1,\ u_j\rangle . \langle f_2,\ v_j\rangle,$$

что записывают, допуская вольность в обозначениях, так:

$$\langle f_1 . f_2,\ t\rangle = \langle f_1 \otimes f_2,\ c(t)\rangle.$$

13.5.3. Пусть $t \in T_x^{(k)}(X)$, где $k \leqslant r$.

a) Для того чтобы $c(t) = t \otimes t$, необходимо и достаточно, чтобы t равнялся 0 или ε_x.

b) Для того чтобы $c(t) = t \otimes \varepsilon_x + \varepsilon_x \otimes t$, необходимо и достаточно, чтобы t был касательным вектором, т. е. чтобы $t \in \in T_x^{(1)+}(X)$.

13.6. Распределения с конечным носителем

13.6.1. Пусть X — многообразие класса C^r, и пусть $k \leqslant r$. Через $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ обозначается прямая сумма пространств $T_x^{(k)}(X)$ для $x \in \in X$. Элемент из $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ называется *распределением с конечным носителем* на X порядка $\leqslant k$. Если f: $X \to F$ — функция класса C^r со значениями в отделимом полинормированном пространстве F и если $t = \sum_{x \in X} t_x$, где $t_x \in T_x^{(k)}(X)$ для всякого $x \in X$ есть распределение с конечным носителем, полагаем

$$\langle f,\ t\rangle = \sum_{x \in X} \langle f,\ t_x\rangle.$$

Аналогично, полагаем $c(t) = \sum_{x \in X} c(t_x)$, что наделяет $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ структурой коассоциативной кокоммутативной коалгебры, обладающей коединицей $t \mapsto \langle 1,\ t\rangle$. Вложения $\mathcal{T}^{(k')}X \to \mathcal{T}^{(k)}(X)$, где $k' \leqslant k$, суть морфизмы коалгебр.

Если $\varphi: X \to Y$ — морфизмы многообразий класса C^r, то отображения $T_x^{(k)}(\varphi): T_x^{(k)}(X) \to T_{\varphi(x)}^{(k)}(Y)$, относящиеся к всевозможным точкам x многообразия X, определяют линейное отображение φ_* из $\mathscr{T}^{(k)}(X)$ в $\mathscr{T}^{(k)}(Y)$, являющееся морфизмом коалгебр.

Если X_1 и X_2 — два многообразия класса C^r, то отображения α_k^{-1} (см. 13.4.5) определяют линейное отображение

$$\mathscr{T}^{(k)}(X_1 \times X_2) \to \mathscr{T}^{(k)}(X_1) \otimes \mathscr{T}^{(k)}(X_2),$$

которое инъективно; это морфизм коалгебр. Если $k = \infty$ или ω, это изоморфизм коалгебр.

13.6.2. Пусть X — многообразие класса C^r и V — векторное K-пространство конечной размерности. Элемент из $\mathscr{T}^{(r)}(X) \otimes V$ называется распределением с конечным носителем на X *со значениями в* V. Если $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{C}$, подобное распределение называется также *комплексным распределением* с конечным носителем на X. Определения и результаты предыдущих пунктов сразу распространяются по линейности на распределения со значениями в V.

13.7. Ослабление структуры

Предполагается, что $K = \mathbf{R}$. Пусть $r' \in N_k$ таково, что $r' \leqslant r$. Пусть X — многообразие класса C^r и X' — многообразие класса $C^{r'}$, полученное ослаблением структуры (5.13.1). Пусть $x \in X$ и $t \in T_x^{(k)}(X)$, где $k \leqslant r'$. Выберем карту $c = (U, \varphi, E)$ на X, центрированную в x, и пусть $\tilde{t}$ — такой элемент из $\mathrm{TS}^{(k)}(E)$, что $\theta_c(\tilde{t}) = t$. Поскольку c есть карта на X', центрированная в x, элемент $t' = \theta_c(\tilde{t})$ из $T_x^{(k)}(X')$ определен; он не зависит от выбора c. Отображение $t \mapsto t'$ есть биекция из $T_x^{(k)}(X)$ на $T_x^{(k)}(X')$, посредством которой эти два пространства *отождествляются*. Получаемые таким способом отождествления согласуются с операциями $\langle f, t\rangle$, $\varphi_*(t)$, $t_1 \otimes t_2$, $c(t)$, ... из предыдущих пунктов.

§ 14. Дифференциальные операторы

В этом параграфе X означает *локально конечномерное* многообразие класса C^r, где $r \in N_K$; через E и F обозначаются векторные расслоения конечного ранга, класса C^r и с базой X.

Все рассматриваемые многообразия и векторные расслоения предполагаются локально конечномерными.

14.1. Дифференциальные операторы

14.1.1. Пусть k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant r$, и пусть $P^k(E)$ — расслоение струй сечений порядка k расслоения E (12.6.1). Положим

$$D^k(E,\ F) = \mathscr{L}(P^k(E);\ F).$$

Это векторное расслоение с базой X и класса C^{r-k}. Сечение этого расслоения над открытым в X подмножеством U отождествляется с отображением

$$D: P^k(E)\,|\,U \to F\,|\,U,$$

коммутирующим с проекцией на U и линейным на каждом слое; такое сечение называется *дифференциальным оператором на U типа $E \to F$ и порядка $\leqslant k$*. Пусть $h \in N_K \cup \{0\}$, где $0 \leqslant h \leqslant r - k$. Через $\mathscr{D}_U^{k,h}(E, F)$ обозначается множество дифференциальных операторов на U типа $E \to F$ и порядка $\leqslant k$, которые *принадлежат классу C^h* (как сечения расслоения $D^k(E, F)$ или как морфизмы из $P^k(E)\,|\,U$ в $F|\,U$, что сводится к тому же). Если $M = D^k(E, F)$, то $\mathscr{D}_U^{k,h}(E, F) = \mathscr{S}_M^h(U)$; это модуль над $\mathscr{C}^h(U)$ (см. 7.4.1).

Если $0 \leqslant k' \leqslant k$, то морфизм $r^{k,k'}: P^k(E) \to P^{k'}(E)$ (см. 12.6.6) определяет *инъекцию* расслоения $D^{k'}(E, F)$ в $D^k(E, F)$; всякий дифференциальный оператор порядка $\leqslant k'$, таким образом, отождествляется с дифференциальным оператором порядка $\leqslant k$. Про дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$, который не является оператором порядка $\leqslant k - 1$, говорят иногда, что он имеет *порядок k*. Если $h \in N_K \cup \{0\}$ и $h \leqslant r - k$ и если U открыто в X, то

$$0 \subset \mathscr{D}_U^{0,h}(E,\ F) \subset \mathscr{D}_U^{1,h}(E,\ F) \subset \cdots \subset \mathscr{D}_U^{k,h}(E,\ F).$$

Если $r = \infty$ или ω, через $\mathcal{D}_U^{\infty,h}(E, F)$ обозначается объединение множеств $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ для $k \geqslant 0$; элемент этого объединения называется дифференциальным оператором на U ограниченного порядка (типа $E \to F$, класса C^h) или иногда просто дифференциальным оператором на U.

14.1.2. (*Операторы нулевого порядка.*) Имеем $P^0(E) = E$ (12.5.1) и $D^0(E, F) = \mathcal{L}(E; F)$. Если U — открытое в X подмножество и если $h \in N_K \cup \{0\}$ и $h \leqslant r$, то элемент из $\mathcal{D}_U^{0,h}(E, F)$ есть морфизм класса C^h из $E \mid U$ в $F \mid U$.

14.1.3. (*Ослабление структуры.*) Предположим, что $K = \mathbf{R}$, и пусть $r' \in N_{\mathbf{R}}$, где $r' \leqslant r$. Пусть X', E' и F' — многообразие и векторные расслоения класса $C^{r'}$, полученные ослаблением структуры из X, E и F соответственно. Пусть k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant r'$. Тогда $P^k(E')$ есть расслоение класса $C^{r'-k}$, полученное из $P^k(E)$ ослаблением структуры, и аналогичный результат справедлив для $D^k(E', F')$. В частности, если U открыто в X и если $0 \leqslant h \leqslant r' - k$, то $\mathcal{D}_U^{k,h}(E', F') = \mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$.

14.1.4. Пусть D — дифференциальный оператор на X типа $E \to F$ и порядка $\leqslant k$ (где $0 \leqslant k \leqslant r$). Пусть U открыто в X и s — сечение класса C^m расслоения E над U, где $m \in N_K \cup \{0\}$ и $k \leqslant m \leqslant r$. Тогда $j^k(s)$ есть сечение класса C^{m-k} расслоения $P^k(E)$ над U (12.6.1); его образ относительно D обозначается через $D_U(s)$ или $D(s)$. Это сечение расслоения $F \mid U$. Предположим, что D принадлежит классу C^h, где $h = m - k$. Тогда $D_U(s)$ принадлежит классу C^h, и полученные таким способом отображения

$$D_U : \mathcal{S}_E^m(U) \to \mathcal{S}_F^h(U)$$

обладают следующими свойствами:

(1) D_U есть K-линейное отображение.

(2) Для всякого $s \in \mathcal{S}_E^m(U)$ и всякого открытого в U подмножества V имеем $D_V(s \mid V) = D_U(s) \mid V$.

(3) Для всякого $s \in \mathcal{S}_E^m(U)$ и всякого $x \in U$, таких, что $j_x^k(s) = 0$, имеем $D_U(s)(x) = 0$.

(3′) Для всякой системы координат $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ на U и всякого репера $s = (s_1, \ldots, s_d)$ расслоения E над U (7.4.4) существуют такие сечения $n_{i,\alpha}$ ($1 \leqslant i \leqslant d$, $\alpha \in \mathrm{N}^n$, $|\alpha| \leqslant k$) для F над U класса C^h, что для всякого семейства $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ элементов из $\mathcal{C}^m(U)$ выполняется равенство

$$D_U\Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant d} f_i \cdot s_i\Big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d, |\alpha| \leqslant k} \Delta_\xi^\alpha(f_i) \cdot n_{i,\alpha} \qquad \text{(см. 13.2.6).}$$

(4) Для всякой функции $f \in \mathcal{C}^m(U)$ и всякого отображения θ из $\mathcal{S}_U^m(E)$ в $\mathcal{S}_U^h(F)$ обозначим через $\operatorname{ad}(f)\,\theta$ отображение

$$s \mapsto f.\theta(s) - \theta(f.s)$$

из $\mathcal{S}_U^m(E)$ в $\mathcal{S}_U^h(F)$. Тогда для всякой функции $f \in \mathcal{C}^m(U)$ существует такой дифференциальный оператор L на U типа $E \to F$, порядка $\leqslant k-1$ и класса C^h, что

$$(\operatorname{ad}(f)\,D_U)(s) = L_U(s) \text{ для всякого } s \in \mathcal{S}_U^m(E).$$

(5) Имеем

$\operatorname{ad}(f_0)\ \ldots\ \operatorname{ad}(f_k)\,D_U = 0$, каковы бы ни были $f_0, \ldots, f_k$ в $\mathcal{C}^m(U)$. Если положить $I = \{0, \ldots, k\}$ и $f_H = \prod\limits_{i \in H} f_i$ для всякого подмножества H в I, то предыдущее соотношение эквивалентно тому, что

$$\sum_{H \subset I} (-1)^{\operatorname{Card}(H)} f_H . D_U(f_{I-H} . s) = 0,$$

каковы бы ни были $f_0, \ldots, f_k$ из $\mathcal{C}^m(U)$ и s из $\mathcal{S}_E^m(U)$.

14.1.5. (*Характеризация дифференциальных операторов.*) Пусть k, m и $h = m - k$ те же, что в 14.1.4. Для всякого открытого в X подмножества U пусть D_U — отображение из $\mathcal{S}_E^m(U)$ в $\mathcal{S}_F^h(U)$. Предположим, что условия 1, 2, 3 (соотв. 1, 2, 3′) из 14.1.4 выполнены для всякого открытого в X подмножества U. Тогда существует один и только один такой элемент D в $\mathcal{D}_X^{k,h}(E, F)$, что отображения D_U суть соответствующие ему отображения [1]). В последующем изложении D отождествляется с семейством отображений D_U.

Если $m = \infty$ или ω, то $h = m$ и условия (3) и (3′) можно заменить одним из условий (4), (5).

14.1.6. (*Скалярные операторы.*) Предположим, что E и F равны тривиальному расслоению K_X. Дифференциальный оператор типа $E \to F$ называется тогда *скалярным* дифференциальным оператором или просто дифференциальным оператором; если его порядок $\leqslant k$, это сечение расслоения $\mathcal{L}(P^k(X); K_X) = P^k(X)^*$, *дуального* к расслоению $P^k(X)$; используя изоморфизм

$$i^{-1} : P^k(X)^* \to T^{(k)}(X) \qquad \text{(см. 13.2.5)},$$

видим, что скалярный дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$ отождествляется с *сечением* векторного расслоения $T^{(k)}(X)$, т. е. с *полем точечных распределений* порядка $\leqslant k$.

---

[1]) Достаточно, впрочем, чтобы условие (3′) выполнялось для семейства (ξ_λ) систем координат и семейства реперов (s_λ), области определения которых покрывают все X.

В частности, возьмем в качестве X открытое подмножество в K^n, где n — целое число $\geqslant 0$. Поля точечных распределений

$$\Delta^{\alpha}: x \mapsto \Delta_x^{\alpha} \qquad \text{(см. 13.2.6.)}$$

суть скалярные дифференциальные операторы класса C^{ω}. Для всякого $h \in N_K$ элементы Δ^{α} (для $|\alpha| \leqslant k$) образуют *базис* $\mathcal{C}^h(X)$-модуля $\mathcal{D}_X^{k,h}(K_X, K_X)$.

14.1.7. (*Комплексные дифференциальные операторы на вещественном многообразии.*) Предположим, что $K = \mathbf{R}$ и что векторные расслоения E и F наделены *комплексными структурами* (8.8.1); пусть k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant r$. Расслоение $P^k(E)$ наделено тогда комплексной структурой (12.6.3); расслоение $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}(P^k(E);\ F)$ (7.8.5) *комплексных* линейных отображений из $P^k(E)$ в F есть векторное подрасслоение в $\mathscr{L}(P^k(E);\ F) = D^k(E,\ F)$; оно обозначается через $D_{\mathbf{C}}^k(E,\ F)$. Его сечение называется *комплексным* дифференциальным оператором типа $E \to F$ и порядка $\leqslant k$. Если $h \in N_K$ и $h \leqslant r - k$ и если U открыто в X, то через $\mathcal{D}_U^{k,h}(E,\ F)_{\mathbf{C}}$ аналогичным образом обозначается пространство сечений класса C^h расслоения $D_{\mathbf{C}}^k(E,\ F)$ над U; это векторное $\mathbf{C}$-пространство. Прочие определения и результаты этого параграфа распространяются на комплексные дифференциальные операторы аналогичным образом; их формулировку мы оставляем читателю.

14.1.8. (*Композиция.*) Пусть G — векторное расслоение класса C^r с базой X. Пусть k' и k'' — положительные целые числа с суммой $k \leqslant r$ и D' (соотв. D'') — дифференциальный оператор на X типа $E \to F$ (соотв. типа $F \to G$) и порядка $\leqslant k'$ (соотв. $\leqslant k''$). Предположим, что $D'\colon P^{k'}(E) \to F$ принадлежит классу $C^{h'}$, где $h' \in N_K \cup \{0\}$ и $k'' \leqslant h' \leqslant r - k'$; отображение

$$D'_* = P^{k''}(D')\colon P^{k''}(P^{k'}(E)) \to P^{k''}(F)$$

принадлежит классу $C^{h'-k''}$ (12.6.3). Пусть β — канонический изоморфизм из $P^k(E)$ в $P^{k''}(P^{k'}(E))$ (см. 12.6.5). Взяв композицию отображений

$$P^k(E) \xrightarrow{\beta} P^{k''}(P^{k'}(E)) \xrightarrow{D'_*} P^{k''}(F) \xrightarrow{D''} G,$$

получаем дифференциальный оператор типа $E \to G$ и порядка $\leqslant k$. Этот оператор называется *композицией* операторов D'' и D'; он обозначается через $D'' \circ D'$.

Если U открыто в X и если $s \in \mathscr{S}_E^k(U)$, то

$$(D'' \circ D')(s) = D''(D'(s))$$

(где оба члена суть сечения расслоения G над U); это оправдывает принятые терминологию и обозначение.

Предположим теперь, что D'' принадлежит классу $C^{h''}$, где $h'' \in N_K \cup \{0\}$ и $h'' \leqslant r - k''$. Тогда $D'' \circ D'$ принадлежит классу C^h, где $h = \inf(h' - k'', h'')$.

Предположим, что $E = F = G$ и что $k' \leqslant h''$; в этом случае $D' \circ D''$ определен. Тогда $D' \circ D'' - D'' \circ D'$ есть дифференциальный оператор типа $E \to E$ и порядка $\leqslant k - 1$; он обозначается через $[D', D'']$.

14.1.9. *(Ассоциативность.)* Сохраним обозначения и предположения из 14.1.8; пусть H — векторное расслоение класса C^r с базой X и D''' — дифференциальный оператор на X типа $G \to H$ и порядка $\leqslant k'''$, где $k' + k'' + k''' \leqslant r$. Предполагается, что D' принадлежит классу $C^{h'}$, где $h' \in N_K \cup \{0\}$ и $k'' + k''' \leqslant h' \leqslant r - k'$, и что D'' принадлежит классу $C^{h''}$, где $h'' \in N_K \cup \{0\}$ и $k''' \leqslant h'' \leqslant r - k''$. Тогда композиции

$$D''' \circ (D'' \circ D') \text{ и } (D''' \circ D'') \circ D'$$

определены и равны.

14.1.10. *Примеры*

a) Пусть U — открытое в X подмножество, $D \in \mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ с $h \in N_K \cup \{0\}$ и $h \leqslant r - k$ и $f \in \mathcal{C}^{h+k}(U)$ (соотв. $f \in \mathcal{C}^h(U)$). Умножение на f в E (соотв. F) есть дифференциальный оператор на U порядка $\leqslant 0$ и типа $E \to E$ (соотв. $F \to F$) (см. 14.1.2). Композиции $D \circ f$ и $f \circ D$ определены и принадлежат $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$; полагаем

$$\operatorname{ad}(f) D = f \circ D - D \circ f \in \mathcal{D}_U^{k-1,h}(E, F)$$

(см. 14.1.4, (4)). Таким образом, $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ наделяется структурой правого $\mathcal{C}^{h+k}(U)$-модуля (соотв. структурой левого $\mathcal{C}^h(U)$-модуля). Структура левого модуля совпадает с соответствующей структурой из 14.1.1.

b) Предположим, что $r = \infty$ или ω. Дифференциальные операторы типа $E \to E$ и класса C^r образуют *ассоциативную K-алгебру* с единичным элементом.

c) Возьмем в качестве X открытое подмножество в K^n. Скалярные дифференциальные операторы Δ^α (14.1.6) удовлетворяют формулам

$$\Delta^\alpha \circ \Delta^\beta = ((\alpha, \beta))\, \Delta^{\alpha+\beta}.$$

Они коммутируют между собой. Обозначим через D_i оператор Δ^{ε_i} (*i-я частная производная*). Если К имеет характеристику 0, то

$$\Delta^{\alpha} = \frac{1}{\alpha!} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}.$$

Если К имеет характеристику $p \neq 0$, то $D_i^p = 0$ для всякого i.

14.1.11. (*Полидифференциальные операторы.*) Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — векторные расслоения класса C^r с базой X, и пусть $k, k_1, \ldots, k_n$ — целые числа, принадлежащие $[0, r]$. Положим

$$L(k_1, \ldots, k_n) = \mathcal{L}(P^{k_1}(E_1) \otimes \cdots \otimes P^{k_n}(E_n); F).$$

Если $k_i \leqslant k$ для всякого i, проекции r^{k,k_i}: $P^k(E_i) \to P^{k_i}(E_i)$ позволяют отождествить расслоение $L(k_1, \ldots, k_n)$ с подрасслоением расслоения $L(k) = L(k, \ldots, k)$. Существует наименьшее подрасслоение $M(k)$ в $L(k)$, содержащее все подрасслоения $L(k_1, \ldots, k_n)$ для $k_1 + \ldots + k_n = k$. Сечение H расслоения $M(k)$ называется *n-дифференциальным* (или *полидифференциальным*) *оператором типа* $(E_1, \ldots, E_n) \to F$ *и порядка* $\leqslant k$. Если s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ есть сечение класса C^m $(m \in N_k,\ m \geqslant k)$ расслоения E_i над открытым в X подмножеством U, то определяем $H_U(s_1, \ldots, s_n) = H(s_1, \ldots, s_n)$ как образ относительно H сечения $j^k(s_1) \otimes \ldots \otimes j^k(s_n)$ расслоения

$$P^k(E_1) \otimes \cdots \otimes P^k(E_n).$$

Это сечение расслоения $F \mid U$. Если H принадлежит классу C^h, это сечение принадлежит классу C^p, где $p = \inf(m - k, h)$.

Если $E_1, \ldots, E_n$ и F равны K_X, говорят, что H — *скалярный* n-дифференциальный (или полидифференциальный) оператор.

Пример. Пусть J — конечное множество, а X — открытое подмножество в K^J. Пусть H — скалярный n-дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$ на X. Существует единственное семейство таких скалярных функций

$$c(\alpha(1), \ldots, \alpha(n))_{(\alpha(1), \ldots, \alpha(n)) \in \mathbf{N}^J},\ \sum_{i=1}^{n} |\alpha(i)| \leqslant k,$$

на X, что

$$H_X(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha(1), \ldots, \alpha(n)} c(\alpha(1), \ldots, \alpha(n))\, \Delta^{\alpha(1)}(f_1) \ldots \Delta^{\alpha(n)}(f_n)$$

для всякого семейства $(f_1, \ldots, f_n)$ функций класса C^k на X. Для того чтобы H принадлежал классу C^h, необходимо и достаточно, чтобы функции $c(\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$ принадлежали классу C^h.

14.2. Символы

14.2.1. Пусть k — положительное целое число $\leqslant r$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to P_k(T(X);\ E) \xrightarrow{\iota} P^k(E) \xrightarrow{j} P^{k-1}(E) \to 0$$

из n° 12.6.8, где положено $j = r^{k,k-1}$. Применяя векторный функтор $M \mapsto \mathscr{L}(M;\ F)$ к этой последовательности, получаем точную последовательность

$$0 \to \mathscr{L}(P^{k-1}(E);\ F) \xrightarrow{j'} \mathscr{L}(P^k(E);\ F) \xrightarrow{\sigma_k} \mathscr{L}(P_k(T(X);\ E);\ F) \to 0,$$

которую можно записать так:

$$0 \to D^{k-1}(E, F) \xrightarrow{j'} D^k(E, F) \xrightarrow{\sigma_k} S^k(E, F) \to 0,$$

вводя обозначение

$$S^k(E, F) = \mathscr{L}(P_k(T(X);\ E);\ F).$$

Гомоморфизм $j' = \mathscr{L}(j;\ \mathrm{Id}_F)$ есть каноническое вложение расслоения $D^{k-1}(E, F)$ в $D^k(E, F)$; гомоморфизм σ_k по определению равен $\mathscr{L}(\iota;\ \mathrm{Id}_F)$. Если D — дифференциальный оператор типа $E \to F$ и порядка $\leqslant k$, то его образ относительно σ_k есть сечение $\sigma_k(D)$ расслоения $S^k(E, F)$, которое называется *k-символом* (или просто символом) оператора D; $\sigma_k(D) = 0$ тогда и только тогда, когда D имеет порядок $\leqslant k - 1$. Если D принадлежит классу C^h, то же справедливо и для его символа.

14.2.2. (*Различные интерпретации расслоения символов.*) Расслоение $S^k(E, F) = \mathscr{L}(P_k(T(X);\ E);\ F)$ можно записать различными способами. Прежде всего, если $x \in X$, то элемент из $P_k(T_x(X);\ E_x)$ отождествляется (13.1.2) с элементом из $\mathscr{L}(\mathsf{TS}^k(T_x(X));\ E_x)$. Таким образом получаем отождествления векторных расслоений

$$P_k(T(X);\ E) = \mathscr{L}(\mathsf{TS}^k(T(X));\ E) = (\mathsf{TS}^k(T(X)))^* \otimes E$$

и, применяя векторный функтор $M \mapsto \mathscr{L}(M;\ F) = M^* \otimes F$, получаем

$$S^k(E, F) = \mathsf{TS}^k(T(X)) \otimes E^* \otimes F = \mathsf{TS}^k(T(X)) \otimes \mathscr{L}(E;\ F).$$

Можно также преобразовать предыдущее выражение. Если M и N — два векторных расслоения, обозначим через $\mathrm{Sym}^k(M;\ N)$ подрасслоение в $\mathscr{L}(M, \ldots, M;\ N)$, образованное k-линейными *симметрическими* отображениями. Имеет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Sym}^k(M;\ N) \to \mathrm{Sym}^k(M;\ K_X) \otimes N;$$

с другой стороны, двойственность между $\bigotimes^k M$ и $\bigotimes^k M^*$ отождествляет Sym^k $(M; K_X)$ с $\mathrm{TS}^k(M^*)$. Тем самым возникает отождествление

$$\mathrm{Sym}^k(M; N) = \mathrm{TS}^k(M^*) \otimes N.$$

Применяя эту формулу к $M = T(X)^*$ и $N = \mathcal{L}(E; F)$, получаем

$$S^k(E, F) = \mathrm{TS}^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E; F) = \mathrm{Sym}^k(T(X)^*; \mathcal{L}(E; F)).$$

Предположим, что K имеет характеристику 0 или $>k$. Если u — симметрическое k-линейное отображение, обозначим через $\tilde{u}$ соответствующее полиномиальное отображение

$$x \mapsto \frac{1}{k!} u(x, \ldots, x).$$

Отображение $u \mapsto \tilde{u}$ определяет изоморфизм

$$S^k(E, F) = \mathrm{Sym}^k(T(X)^*, \mathcal{L}(E; F)) \to P_k(T(X)^*; \mathcal{L}(E, F)).$$

Таким образом, всякий элемент σ из $S^k(E, F)_x$, где $x \in X$, может быть отождествлен с *однородным полиномиальным отображением* $\tilde{\sigma}$ *степени* k *из* $T_x(X)^*$ *в* $\mathcal{L}(E_x; F_x)$.

14.2.3. (*Вычисление символа дифференциального оператора.*) Пусть $x \in X$ и D — дифференциальный оператор типа $E \to F$ и порядка $\leqslant k$, определенный в открытой окрестности точки x и принадлежащий классу C^{r-k}. Сейчас мы более явно опишем значение $\sigma_k(D)(x)$ *символа* оператора D в точке x. Рассмотрим его как элемент из $\mathrm{Sym}^k(T_x(X)^*; \mathcal{L}(E_x; F_x))$ (см. 14.2.2). Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — ковекторы в x, и выберем такие функции $f_1, \ldots, f_k$ класса C^r в открытой окрестности U точки x, что $d_x f_i = \omega_i$ для $i = 1, \ldots, k$. Положим

$$D' = (-1)^k \operatorname{ad}(f_k) \ldots \operatorname{ad}(f_1) D \quad (\text{см. } 14.1.10, \text{ a})).$$

Оператор D' имеет порядок $\leqslant 0$; это сечение расслоения $\mathcal{L}(E; F) \mid U$. Значение оператора D' в x есть $\lambda(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ из $\mathcal{L}(E_x; F_x)$, зависящий лишь от $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$. Отображение λ, определенное таким способом, симметрично. *Оно совпадает с символом* $\sigma_k(D)(x)$ *оператора* D *в* x.

Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, и более явно опишем символ $\sigma_x(D)(x)$, рассматриваемый как однородное степени k полиномиальное отображение из $T_x(X)^*$ в $\mathcal{L}(E_x; F_x)$ (см. 14.2.2). Пусть $\omega \in T_x(X)^*$ и $v \in E_x$; выберем такую функцию f класса C^r в открытой окрестности U точки x, что $d_x f = \omega$, и такое сечение s класса C^r расслоения E над U, что $s(x) = v$. Существует одно и только

одно такое семейство $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ сечений расслоения F над U, что

$$e^{-tf} D(e^{tf} s) = \sum_{j=0}^{k} t^j \varphi_j \quad \text{для всякого} \quad t \in K.$$

Тогда $\varphi_k(x)$ не зависит от выбора f и s, таких, что $d_x f = \omega$, $v(x) = s$; отображение $v \mapsto \varphi_k(x)$ есть элемент $\lambda(\omega)$ из $\mathscr{L}(E_x; F_x)$, и λ есть однородное степени k полиномиальное отображение из $T_x(X)^*$ в $\mathscr{L}(E_x; F_x)$. *Это отображение совпадает с символом* $\sigma_k(D)(x)$ *оператора* D в x.

14.2.4. (*Скалярный случай.*) Возьмем $E = F = K_X$; в этом случае $D^k(E, F)$ отождествляется с расслоением $T^{(k)}(X)$ точечных распределений порядка $\leqslant k$ (см. 14.1.6). Имеем

$$S^k(E, F) = \mathrm{TS}^k(T(X)),$$

и символ

$$\sigma_k\colon T^{(k)}(X) \to \mathrm{TS}^k(T(X))$$

есть не что иное, как композиция

$$T^{(k)}(X) \to T^{(k)}(X)/T^{(k-1)}(X) \xrightarrow{i_k} \mathrm{TS}^k(T(X)),$$

где i_k — изоморфизм, определенный в 13.3.2.

Возьмем, например, в качестве X открытое подмножество в K^n, и пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — канонический базис в пространстве K^n (отождествленном с касательными пространствами $T_x(X)$). Если $\alpha \in \mathbf{N}^n$ таково, что $|\alpha| \leqslant k$, то символ оператора Δ^α задается формулами (см. 13.3.3):

$$\sigma_k(\Delta^\alpha)(x) = 0, \qquad \text{если } |\alpha| < k,$$

$$\sigma_k(\Delta^\alpha)(x) = \gamma_{\alpha_1}(e_1) \ldots \gamma_{\alpha_n}(e_n), \quad \text{если } |\alpha| = k,$$

причем произведение элементов $\gamma_{\alpha_i}(e_i)$ есть *симметрическое произведение* (см. 13.2.6 и 13.3.3).

14.2.5. *(Символ композиции.)* Обозначения и предположения те же, что в 14.1.8. Композиция линейных отображений определяет спаривание

$$\mathscr{L}(F; G) \times \mathscr{L}(E; F) \to \mathscr{L}(E; G).$$

С другой стороны, операция *симметрического произведения* определяет спаривание

$$\mathrm{TS}^{k''}(T(X)) \times \mathrm{TS}^{k'}(T(X)) \to \mathrm{TS}^k(T(X)).$$

Поскольку

$$\left.\begin{aligned} S^{k''}(F, G) &= \mathrm{TS}^{k''}(T(X)) \otimes \mathscr{L}(F; G), \\ S^{k'}(E, F) &= \mathrm{TS}^{k'}(T(X)) \otimes \mathscr{L}(E; F), \\ S^{k}(E, G) &= \mathrm{TS}^{k}(T(X)) \otimes \mathscr{L}(E; G); \end{aligned}\right\} \text{см. } 14.2.2,$$

отсюда с помощью тензорного произведения получаем спаривание

$$(*) \qquad S^{k''}(F, G) \times S^{k'}(E, F) \to S^{k}(E, G).$$

Тогда получаем формулу

$$\sigma_k(D'' \circ D') = \sigma_{k''}(D'') \,.\, \sigma_{k'}(D'),$$

где произведение, фигурирующее в правой части, определяется указанным выше спариванием (*).

Предположим теперь, что K имеет характеристику нуль, и пусть $x \in X$. Обозначим через σ (соотв. σ', σ'') k-символ (соотв. k'-символ, k''-символ) оператора $D'' \circ D'$ (соотв. D', D'') в x. Для всякого $\omega \in T_x(X)^*$ имеем тогда (в обозначениях конца n° 14.2.2)

$$\tilde{\sigma}(\omega) \in \mathscr{L}(E_x;\ G_x), \quad \tilde{\sigma}'(\omega) \in \mathscr{L}(E_x;\ F_x), \quad \tilde{\sigma}''(\omega) \in \mathscr{L}(F_x;\ G_x)$$

и

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{\sigma}''(\omega) \circ \tilde{\sigma}'(\omega).$$

14.3. Транспонирование

В этом пункте предполагается, что X — чистое многообразие размерности n.

14.3.1. Пусть $\Omega = \det(T(X)^*)$ (см. 7.9.9); это векторное расслоение ранга 1 в каждой точке, с базой X и класса C^{r-1}. Тогда

$$\Omega = \textstyle\bigwedge^n T(X)^* = \mathrm{Alt}^n(T(X);\ K_X).$$

Пусть M — векторное расслоение с базой X. Полагаем

$$\tilde{M} = \mathscr{L}(M;\ \Omega) = M^* \otimes \Omega^{1)}.$$

Если M принадлежит классу C^h, где $h \in N_K \cup \{0\}$ и $h \leqslant r - 1$, таково же и $\tilde{M}$. Каноническое отображение из M в $\tilde{\tilde{M}} = \mathscr{L}(\mathscr{L}(M;\ \Omega);\ \Omega)$ есть изоморфизм; оно используется для отождествления M с $\tilde{\tilde{M}}$.

14.3.2. *(Определение транспонирования.)* Пусть k — целое положительное число $\leqslant r - 1$, и пусть D — дифференциальный оператор типа $E \to F$, порядка $\leqslant k$ и класса C^h, где $h \in N_K \cup \{0\}$ и $k \leqslant h \leqslant r - k$. Тогда существует дифференциальный оператор ${}^tD$ на X типа $\tilde{F} \to \tilde{E}$ и порядка $\leqslant k$, обладающий следующим свойством:

---

[1]) Следует не смешивать $\tilde{M}$ с накрытием для M, определенным в 10.2.4 и обозначаемым таким же образом.

Пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — система координат в открытом в X подмножестве U, и пусть $s = (s_i)_{1 \leqslant i \leqslant e}$ (соотв. $t = (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant f}$) — репер расслоения E (соотв. расслоения F) над U. Пусть $(\overset{*}{s}_i)$ (соотв. $(\overset{*}{t}_j)$) — репер расслоения E^* (соотв. расслоения F^*), такой, что $\langle s_i, \overset{*}{s}_j \rangle = \delta_{ij}$ (соотв. $\langle t_i, \overset{*}{t}_j \rangle = \delta_{ij}$), и пусть $(\tilde{s}_i)$ (соотв. $(\tilde{t}_j)$) — репер расслоения $\tilde{E}$ (соотв. $\tilde{F}$) над U, полученный при взятии тензорного произведения репера $(\overset{*}{s}_i)$ (соотв. $(\overset{*}{t}_j)$) с репером $\omega = d\xi^1 \wedge \ldots \wedge d\xi^n$ расслоения Ω. Пусть c_α^{ij} $(1 \leqslant i \leqslant e,\ 1 \leqslant j \leqslant f,\ |\alpha| \leqslant k)$ — такие функции класса C^h на U, что

$$D\left(\sum_i f_i s_i\right) = \sum_{i,j,\alpha} c_\alpha^{ij} \Delta_\xi^\alpha (f_i) \cdot t_j,$$

каковы бы ни были функции f_i в $\mathcal{C}^{h+k}(U)$ (см. 14.1.4 (3')). Тогда

$${}^tD\left(\sum_j g_j \tilde{t}_j\right) = \sum_{i,j,\alpha} (-1)^{|\alpha|} \Delta_\xi^\alpha (c_\alpha^{ij} g_j)\, \tilde{s}_i,$$

каковы бы ни были функции g_j в $\mathcal{C}^{h+k}(U)$.

Предыдущее свойство (которое должно выполняться, каковы бы ни были ξ, s и t) определяет ${}^tD$ однозначно [1]). Оператор ${}^tD$ называется *транспонированным* к D; он принадлежит классу C^{h-k}. Если $h \geqslant 2k$, транспонированный оператор для ${}^tD$ определен и равен D (ввиду отождествлений расслоений $\tilde{\tilde{E}}$ и $\tilde{\tilde{F}}$ с E и F соответственно).

Отображение $D \mapsto {}^tD$ является K-линейным. Если $k = 0$, т. е. если D есть морфизм из E в F, то ${}^tD$ есть морфизм $\mathcal{L}(D;\ \mathrm{Id}_\Omega)$ из $\tilde{F}$ в $\tilde{E}$.

Символ оператора ${}^tD$ получается из символа оператора D с помощью изоморфизма

$$\mathsf{TS}^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E;\ F) \to \mathsf{TS}^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(\tilde{F};\ \tilde{E}),$$

являющегося тензорным произведением автоморфизма $(-1)^k$ расслоения $\mathsf{TS}^k(T(X))$ и изоморфизма $u \mapsto \mathcal{L}(u;\ \mathrm{Id}_\Omega)$ из $\mathcal{L}(E;\ F)$ на $\mathcal{L}(\tilde{F};\ \tilde{E})$.

14.3.3. (*Транспонированный оператор к композиции.*) Примем обозначения и предположения из 14.1.8; предположим, что D' принадлежит классу $C^{h'}$ и D'' — классу $C^{h''}$, где h', h'' лежат в $N_K \cup \{0\}$, $h' \geqslant k' + 2k''$ и $h'' \geqslant k'' + 2k'$.

---

[1]) На самом деле достаточно проверить требуемое свойство для таких троек $(\xi^\lambda, s^\lambda, t^\lambda)$, что области определения карт ξ^λ покрывают все X.

Тогда определены транспонированные операторы к D', D'' и $D'' \circ D'$, равно как композиция операторов ${}^tD'$ и ${}^tD''$, и

$$ {}^t(D'' \circ D') = {}^tD' \circ {}^tD''. $$

В частности, если приняты предположения и обозначения из 14.3.2 и f — функция класса $C^{h'}$ на X с $2k \leqslant h'$, то ${}^t(D \circ f) = f \circ {}^tD$.

Пример. Возьмем в качестве X открытое подмножество в K^n. Обозначим через $\xi^1, \ldots, \xi^n$ координатные функции на X и отождествим Ω с K_X посредством репера $\omega = d\xi^1 \wedge \ldots \wedge d\xi^n$. Если $E = F = K_X$, то

$$ \tilde{E} = \tilde{F} = \mathscr{L}(K_X;\ \Omega) = \mathscr{L}(K_X;\ K_X) = K_X, $$

и операция $D \mapsto {}^tD$ преобразует скалярные дифференциальные операторы в скалярные дифференциальные операторы. Например,

$$ {}^t(\Delta^\alpha) = (-1)^{|\alpha|}\Delta^\alpha \text{ для всякого } \alpha \in \mathbf{N}^n. $$

Если r бесконечно, то транспонирование есть *антиавтоморфизм* алгебры $\mathscr{D}_X^{\infty, r}(K_X, K_X)$.

14.3.4. Пусть k — такое положительное целое число, что K имеет характеристику 0 или $>k$. Пусть Ω_1 — векторное расслоение $\bigwedge^{n-1} T(X)^* = \mathrm{Alt}^{n-1}(T(X); K_X)$. Примем обозначения и предположения из 14.3.2; пусть, кроме того, D' — дифференциальный оператор на X типа $\tilde{F} \to \tilde{E}$ и порядка $\leqslant k$; *оператором Грина* для (D, D') называется всякий такой полидифференциальный оператор G (см. 14.1.11) типа $(E, \tilde{F}) \to \Omega_1$, порядка $\leqslant k - 1$[1]) и класса C^h (с $h \geqslant 1$), что имеет место тождество

$$ (1) \qquad \langle D(u), v\rangle - \langle u, D'(v)\rangle = d(G(u, v)), $$

каковы бы ни были открытое в X подмножество U и элементы $u \in \mathscr{S}_E^k(U)$, $v \in \mathscr{S}_{\tilde{F}}^k(U)$. Уточним, что в этой формуле d означает внешнее дифференцирование (8.3.5) и $\langle D(u), v\rangle$ (соотв. $\langle u, D'(v)\rangle$) означает сечение расслоения Ω над U, полученное из пары $(D(u), v)$ (соотв. из пары $(u, D'(v))$) посредством канонического спаривания из $F \times \tilde{F}$ (соотв. из $E \times \tilde{E}$) в Ω. Существование оператора G влечет за собой $D' = {}^tD$; говорят также, что G есть оператор Грина для D.

---

[1]) Если $k = 0$, условимся, что это означает $G = 0$.

14.3.5. Пусть D — дифференциальный оператор на X типа $E \to F$, порядка $\leqslant k$ и класса C^h с $h \in N_K$ и $k \leqslant h \leqslant r-k$. Для D существует оператор Грина класса C^{h-k+1} в каждом из следующих случаев:

a) $K = \mathbf{R}$, $r = \infty$ и X паракомпактно.

b) K имеет характеристику 0 или $>k$, X изоморфно открытому подмножеству в K^n и расслоения E и F изоморфны тривиальным расслоениям.

c) Оператор D имеет порядок $\leqslant 1$ (см. 14.3.7).

14.3.6. Сохраним предположения и обозначения из 14.3.3. Если G' (соотв. G'') есть оператор Грина для D' (соотв. D''), то существует один и только один такой оператор Грина H для $D'' \circ D'$, что

$$H(u, v) = G''(D'(u), v) + G'(u, {}^tD''(v)),$$

каковы бы ни были открытое в X подмножество U и элементы $u \in \mathscr{S}^k_E(U)$ и $v \in \mathscr{S}^k_{\tilde{G}}(U)$.

14.3.7. Имеем $S^1(E, F) = T(X) \otimes E^* \otimes F$ (см. 14.2.2). С другой стороны, правое внутреннее произведение $(\xi, \omega) \mapsto i(\xi)\,\omega$ (см. *Alg.*, chap. III, p. 158[1]) определяет изоморфизм из $T(X) \otimes \Omega$ на Ω_1; посредством тензорного произведения с дуальным к Ω расслоением Ω^* получаем, таким образом, изоморфизм из $T(X)$ на $\Omega^* \otimes \Omega_1$, а из него изоморфизмы векторных расслоений

$$S^1(E, F) = \Omega^* \otimes \Omega_1 \otimes E^* \otimes F = (E \otimes F^* \otimes \Omega)^* \otimes \Omega_1 =$$
$$= (E \otimes \tilde{F})^* \otimes \Omega_1 = \mathscr{L}(E \otimes \tilde{F};\ \Omega_1).$$

В таком случае, пусть D — дифференциальный оператор на X типа $E \to F$, порядка $\leqslant 1$ и класса C^h с $h \in N_K \cup \{0\}$ и $h \leqslant r - 1$. Существует единственный оператор Грина для D, он имеет порядок 0; это морфизм класса C^h из $E \otimes \tilde{F}$ в Ω_1, и он получается из символа оператора D посредством предыдущего отождествления.

14.3.8. Предположим, что $K = \mathbf{R}$ и что X отделимо и *ориентировано* (10.2.4), и пусть A — замкнутый кусок (11.1.2) многообразия X. Наделим A ориентацией, индуцированной ориентацией многообразия X, и ∂A — соответствующей ориентацией (11.2.1). Пусть k — такое целое число, что $2k \leqslant r$, а D — дифференциальный оператор на X типа $E \to F$, порядка $\leqslant k$ и класса C^k. Пусть G — оператор Грина для D. Пусть U — открытое в X подмножество, $u \in$

[1]) См. также *Алг.*, гл. III, § 8, n° 4.— *Прим. перев.*

$\in \mathscr{S}^k_E(U)$, $v \in \mathscr{S}^k_{\tilde{F}}(U)$, и предположим, что носители сечений u и v пересекают A по компакту. Тогда

$$\int_A \langle D(u), v\rangle - \int_A \langle u, {}^tD(v)\rangle = \int_{\partial A} G(u, v)$$

(формула Грина). В частности, если $\partial A = \varnothing$, то

$$\int_A \langle D(u), v\rangle = \int_A \langle u, {}^tD(v)\rangle.$$

14.4. Примеры

Предполагается, что X — чистое многообразие конечной размерности n. Предполагается также, что оно наделено структурой многообразия класса C^{r+1}, согласованной с данной структурой класса C^r.

14.4.1. *(Инфинитезимальные преобразования.)* Пусть τ — *векторный функтор в конечной размерности* для изоморфизмов класса C^r; допустим, что для всякого конечномерного векторного пространства V пространство $\tau(V)$ конечномерно. Через E_τ обозначается векторное расслоение $\tau(T(X))$; оно принадлежит классу C^r.

Пусть ξ — векторное поле класса C^r на X. Существует такой дифференциальный оператор D типа $E_\tau \to E_\tau$ и порядка $\leqslant 1$, что

$$D_U(s) = \theta_\xi \,.\, s$$

для всякого открытого в X подмножества U и всякого $s \in \mathscr{S}^r_E(U)$ (см. 8.4.3). Такой оператор D единствен; его обозначают через $(\theta_\xi)_\tau$ или просто θ_ξ. Его символ есть сечение $\xi \otimes \mathrm{Id}_{E_\tau}$ векторного расслоения

$$S^1(E_\tau, E_\tau) = T(X) \otimes \mathscr{L}(E_\tau;\ E_\tau).$$

Если V — конечномерное векторное K-пространство, положим

$$\tilde{\tau}(V) = \mathscr{L}(\tau(V);\ \mathrm{Alt}^n(V;\ K)) = \tau(V)^* \otimes \textstyle\bigwedge^n V^*,$$

и если $u\colon V_1 \to V_2$ — изоморфизм, определим $\tilde{\tau}(u)\colon \tilde{\tau}(V_1) \to \tilde{\tau}(V_2)$ с помощью переноса структуры. Тем самым получаем векторный функтор в конечной размерности $\tilde{\tau}$. Расслоение $E_{\tilde{\tau}} = \tilde{\tau}(T(X))$ очевидным образом отождествляется с расслоением $(E_\tau)^\sim$; транспонированный оператор для $(\theta_\xi)_\tau$ есть — $(\theta_\xi)_{\tilde{\tau}}$, и формула (1) из n° 14.3.4 принимает вид

$$\langle \theta_\xi \,.\, u, v\rangle + \langle u, \theta_\xi \,.\, v\rangle = d\,(i(\xi)(u \,.\, v)).$$

14.4.2. (*Внешний дифференциал.*) Для всякого целого числа $p \geqslant 0$ полагаем

$$\Omega^p = \mathrm{Alt}^p(T(X);\ K_X).$$

Существует такой дифференциальный оператор D типа $\Omega^p \to \Omega^{p+1}$ и порядка $\leqslant 1$, что

$$D_U(\omega) = d\omega$$

для всякого открытого в X подмножества U и всякого $\omega \in \mathscr{S}^r_{\Omega^p}(U)$. Такой оператор D единствен; он обозначается через d (или d_p, если хотят указать явно число p).

Его символ есть элемент из $S^1(\Omega^p, \Omega^{p+1})$, получаемый следующим образом: прежде всего

$$S^1(\Omega^p, \Omega^{p+1}) = T(X) \otimes \mathscr{L}(\Omega^p; \Omega^{p+1}) =$$
$$= \mathscr{L}(\Omega^1; \mathscr{L}(\Omega^p; \Omega^{p+1})) = \mathscr{L}(\Omega^1, \Omega^p; \Omega^{p+1}),$$

где $\mathscr{L}(\Omega^1, \Omega^p; \Omega^{p+1})$ означает расслоение билинейных отображений из $\Omega^1 \times \Omega^p$ в Ω^{p+1}. Но внешнее произведение $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ определяет каноническое сечение этого последнего расслоения; *это сечение есть символ оператора d_p.*

Чтобы определить *транспонированный* к d_p оператор, заметим сначала, что внешнее произведение определяет спаривание $\Omega^p \times \Omega^{n-p} \to \Omega^n = \Omega$, которое позволяет отождествить $(\Omega^p)^{\sim}$ с Ω^{n-p}. Аналогично, $(\Omega^{p+1})^{\sim}$ отождествляется с Ω^{n-p-1}. При этих соглашениях транспонированный к d_p оператор есть $(-1)^{p+1} d_{n-p-1}$, и соответствующий оператор Грина типа $(\Omega^p, \Omega^{n-p-1}) \to \Omega_1 = \Omega^{n-1}$ является просто внешним произведением (на каждом слое).

14.4.3. (*Лапласиан.*) Пусть $K = \mathbf{R}$, $r = \infty$, $X = \mathbf{R}^n$, $E = F = K_X$; через ξ^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ обозначаются координатные функции на X; полагаем $D_i = d/d\xi^i$ и $L = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$. Оператор L есть скалярный дифференциальный оператор порядка $\leqslant 2$. Если отождествить Ω с K_X посредством репера $\omega = d\xi^1 \wedge \ldots \wedge d\xi^n$, то получим $\tilde{E} = \tilde{F} = K_X$ (см. 14.3.3, пример) и ${}^tL = L$.

Для $1 \leqslant i \leqslant n$ положим $\omega_i = (-1)^{i-1} d\xi^1 \wedge \ldots \wedge d\xi^{i-1} \wedge d\xi^{i+1} \wedge \ldots \wedge d\xi^n$. Элементы ω_i образуют репер расслоения $\Omega_1 = \Omega^{n-1}$. Если $f \in \mathscr{C}^1(X)$, обозначим через $\mathrm{grad}(f)$ сечение $\sum_{i=1}^{n} D_i(f)\,\omega_i$ расслоения Ω_1. Существует такой оператор Грина G для L, что

$$G(u, v) = v\,.\,\mathrm{grad}(u) - u\,.\,\mathrm{grad}(v)$$

для всякого открытого в X подмножества U и u, v из $\mathcal{C}^1(U)$. В частности, пусть A — компактный кусок пространства $\mathbf{R}^n$. Ориентируем $\mathbf{R}^n$, наделим A ориентацией, индуцированной ориентацией пространства $\mathbf{R}^n$, и ∂A — соответствующей ориентацией (11.2.1). Тогда

$$\int_A (Lu) \,.\, v\omega - \int_A u \,.\, (Lv)\,\omega = \int_{\partial A} (v \,.\, \operatorname{grad}(u) - u \,.\, \operatorname{grad}(v))$$

для u, v из $\mathcal{C}^1(X)$.

§ 15. Многообразия отображений[1])

В этом параграфе предполагается, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Буква r означает целое число $\geqslant 1$, и буква s — такой элемент в N_K, что $s \geqslant r$; имеем $s = \omega$, если $K = \mathbf{C}$.

15.1. Функции класса $C^{r,s}$

В этом пункте E означает *вещественное* банахово пространство, F_1 и F_2 — банаховы пространства над K, V — открытое подмножество в $E \times F_1$ и f — отображение из V в F_2. Пространства E, F_1 и F_2 наделяются нормами, согласованными с их структурами банаховых пространств.

15.1.1. *(Дифференцируемый случай.)* Предполагается, что $K = \mathbf{R}$ и $s \neq \omega$. Говорят, что f принадлежит классу $C_{\mathbf{R}}^{r,s}$ (или просто $C^{r,s}$), если оно обладает непрерывными итерированными частными производными $D_E^p D_{F_1}^q f$ (1.7.2) для всякой пары (p, q) таких положительных целых чисел, что $p \leqslant r$ и $p + q \leqslant s$. То же можно выразить, сказав, что итерированные частные производные $D_{F_1}^q f$ существуют и принадлежат классу C^r для всякого такого целого числа q, что $0 \leqslant q \leqslant s - r$. Если $s = r$, это эквивалентно утверждению, что f принадлежит классу C^r; если $s \geqslant r + 1$, это эквивалентно утверждению, что f принадлежит классу C^r и $D_{F_1} f$ — классу $C^{r,s-1}$.

---

[1]) Определения и результаты этого параграфа распространяются без существенных изменений на случай, когда банахово пространство E из n° 15.1 заменено *замкнутым полупространством*, и на случай, когда многообразие B из n°n° 15.1.6—15.3.2 (соотв. многообразие X из n° 15.3.3) заменено *куском* многообразия (11.1.2). В частности, пространство отображений класса C^r отрезка $[0, 1]$ в K-многообразие Y класса C^s $(s > r)$ имеет естественную структуру K-многообразия класса C^{s-r}.

Другое возможное обобщение состоит в том, чтобы заменить E и B (соотв. X) топологическими пространствами (соотв. компактным топологическим пространством) и взять $r = 0$. Таким образом, если X — компактное пространство и Y есть K-многообразие класса C^s, то множество $\mathcal{C}^0(X; Y)$ непрерывных отображений из X в Y имеет естественную структуру K-многообразия класса C^s (нижележащая топология есть топология равномерной сходимости).

Мы оставляем читателю труд по развитию этих кратких указаний.

Если f принадлежит классу $C^{r,s}$ и $p \leqslant r$, $p+q+1 \leqslant s$, то функция $D^p_E D^q_{F_1} f$ имеет частную производную относительно F_1, задаваемую формулой

(1) $$D_{F_1}(D^p_E D^q_{F_1} f) = D^p_E D^{q+1}_{F_1} f.$$

15.1.2. *(Аналитический случай.)* Предположим, что $s = \omega$. Для всякого целого числа $k \geqslant 0$ обозначим через $P_k(F_1; F_2)$ пространство однородных непрерывных многочленов степени k на F_1 со значениями в F_2, наделенное нормой, определенной в приложении А.2, стр. 206.

Говорят, что f принадлежит классу $C^{r,\omega}_K$ (или просто $C^{r,\omega}$, если нет сомнения относительно K), если для всякой точки $(x_0, y_0) \in V$ существуют окрестность U точки x_0 в E, вещественные числа $R > 0$ и $M \geqslant 0$ и функции $h_k\colon U \to P_k(F_1; F_2)$ $(k \in \mathbf{N})$ класса C^r (относительно структуры дифференцируемого многообразия, лежащей ниже структуры K-многообразия на $P_k(F_1; F_2)$), такие, что

(i) $U \times (y_0 + B(R)) \subset V$, где $B(R)$ — открытый шар радиуса R в F_1;

(ii) если $x \in U$ и $p \leqslant r$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \| D^p h_k(x) \| R^k \leqslant M$;

(iii) если $x \in U$ и $t \in B(R)$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k(x)(t) = f(x_0, y_0 + t)$.

Эти свойства влекут за собой свойство

(iv) Для всякого $t \in B(R)$ функция $x \mapsto f(x, y_0 + t)$ принадлежит классу C^r в U и

(2) $$D^p_E f(x, y_0 + t) = \sum_{k=0}^{\infty} D^p h_k(x)(t), \text{ если } p \leqslant r \text{ и } x \in U.$$

Определение функций класса $C^{r,\omega}$ не меняется, если приведенное выше условие (ii) заменяется одним из следующих двух условий:

(ii′) Функции h_k определяют морфизм класса C^r из U в вещественное банахово пространство, лежащее ниже банахова K-пространства $\mathcal{H}_R(F_1; F_2)$ (3.1.1 и 3.1.2).

(ii″) Функции h_k определяют морфизм класса C^r из U в вещественное банахово пространство, лежащее ниже банахова K-пространства $\tilde{\mathcal{H}}_R(F_1; F_2)$ (3.1.5).

15.1.3. Предположим, что $K = \mathbf{R}$. Для того, чтобы f принадлежало классу $C^{r,\omega}_{\mathbf{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежало классу $C^{r,\infty}$ (15.1.1) и чтобы для всякого $(x_0, y_0) \in V$ существовали окрестность V_0 точки (x_0, y_0) в V и положительные вещественные

числа A и M, такие, что

$$(3) \qquad \frac{1}{q!}\| D_E^p D_{F_1}^q f(x, y) \| \leqslant A \cdot M^q$$

для всякого $p \leqslant r$, всякого $q \geqslant 0$ и всякого $(x, y) \in V_0$.

15.1.4. Предположим, что $K = \mathbf{C}$. Для того чтобы f принадлежало классу $C_{\mathbf{C}}^{r,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

a) f принадлежит классу $C_{\mathbf{R}}^{r,\omega}$ относительно вещественных структур, лежащих ниже комплексных структур на F_1 и F_2.

b) Для всякого $(x, y) \in V$ $D_{F_1} f(x, y)$ есть $\mathbf{C}$-линейное отображение из F_1 в F_2. Если F_1 конечномерно, условие a) можно заменить условием

a′) f принадлежит классу C^r.

15.1.5. Множество отображений класса $C^{r,s}$ из V в F_2 не зависит от выбора норм на E, F_1, F_2.

15.1.6. Пусть B — дифференцируемое многообразие класса C^r, W — открытое подмножество в $B \times F_1$ и ρ — отображение из W в F_2. Пусть $c = (U, \varphi, E_c)$ — карта на многообразии B. Обозначим через W_c открытое в $E_c \times F_1$ подмножество, являющееся образом относительно $\varphi \times \mathrm{Id}_{F_1}$ подмножества $W \cap (U \times F_1)$, и через ρ_c — такое отображение из W_c в F_2, что

$$\rho_c(\varphi(x), y) = \rho(x, y), \quad \text{если } (x, y) \in W \cap (U \times F_1).$$

Говорят, что отображение $\rho\colon W \to F_2$ принадлежит *классу* $C^{r,s}$, если для всякой карты c на многообразии B отображение ρ_c: $: W_c \to F_2$ принадлежит классу $C^{r,s}$ в смысле 15.1.1 и 15.1.2; достаточно, чтобы это условие было выполнено для некоторого семейства карт, области определения которых покрывают все B. Подобное отображение ρ принадлежит классу C^r (относительно нижележащих вещественных структур на $B \times F_1$ и F_2); его ограничение на множество $W \cap (\{b\} \times F_1)$ есть K-морфизм класса C^s для всякого $b \in B$.

15.1.7. Пусть B_1 и B_2 — дифференцируемые многообразия класса C^r и $g\colon B_1 \to B_2$ — морфизм класса C^r. Пусть W_1 (соотв. W_2) — открытое в $B_1 \times F_1$ (соотв. в $B_2 \times F_2$) подмножество и h — отображение из W_1 в W_2.

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & W_2 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ B_1 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd}$$

Говорят, что h есть *g-морфизм класса* $C^{r,s}$,

если $\mathrm{pr}_1 \circ h = g \circ \mathrm{pr}_1$ и если $\mathrm{pr}_2 \circ h$ является отображением класса $C^{r,s}$ (15.1.6) из W_1 в F_2.

Пусть также B_3 — многообразие класса C^r, W_3 — открытое подмножество в $B_3 \times F_3$, где F_3 — банахово K-пространство, и g' — морфизм класса C^r из B_2 в B_3. Если h (соотв. h') есть g-морфизм (соотв. g'-морфизм) класса $C^{r,s}$ из W_1 в W_2 (соотв. из W_2 в W_3), то композиция $h' \circ h$ есть $(g' \circ g)$-морфизм класса $C^{r,s}$ из W_1 в W_3.

15.2. Многообразие класса $C^{r,s}$ над многообразием класса C^r

На протяжении всего этого пункта через B обозначается дифференцируемое многообразие класса C^r.

15.2.1. Пусть X — множество, наделенное отображением $p\colon X \to B$. *Картой на X над B* называется тройка $\theta = (V, \psi, F)$, где V — подмножество в X, F — банахово K-пространство и ψ — биекция множества V на такое открытое в $B \times F$ подмножество, что $\mathrm{pr}_1 \circ \psi = p \mid V$.

Пусть $(\theta_i)_{i \in I} = ((V_i, \psi_i, F_i))_{i \in I}$ — семейство карт на X над B. Говорят, что карты θ_i являются *$C^{r,s}$-согласованными,* если для всякой пары элементов i, j из I выполнены следующие два условия:

a) $\psi_i(V_i \cap V_j)$ открыто в $B \times F_i$ и $\psi_j(V_i \cap V_j)$ открыто в $B \times F_j$;

b) отображение $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ из $\psi_j(V_i \cap V_j)$ в $\psi_i(V_i \cap V_j)$ есть Id_B-морфизм класса $C^{r,s}$ (15.1.7).

Семейство $((V_i, \psi_i, F_i))_{i \in I}$ карт на X над B, являющихся $C^{r,s}$-согласованными и таких, что их области определения V_i покрывают все X, называется *$C^{r,s}$-атласом* на X (над B). Два $C^{r,s}$-атласа называются эквивалентными, если их объединение есть $C^{r,s}$-атлас; отношение $C^{r,s}$-эквивалентности между атласами есть отношение эквивалентности. Класс эквивалентности $C^{r,s}$-атласов называется *структурой многообразия класса $C^{r,s}$ над B* на множестве X; когда хотят явно указать K, вместо $C^{r,s}$ пишут $C^{r,s}_K$. Если X — многообразие класса $C^{r,s}$ над B, говорят, что $p\colon X \to B$ есть *проекция* многообразия X; если θ — карта на X над B, то говорят, что θ есть *карта на $C^{r,s}$-многообразии* X, если θ принадлежит некоторому атласу из класса эквивалентности, определяющего структуру на X.

15.2.2. Пусть X — многообразие класса $C^{r,s}$ над B с проекцией p. На X существует одна и только одна такая структура дифференцируемого многообразия класса C^r, что для всякой карты (V, ψ, F) на $C^{r,s}$-многообразии X множество V открыто в X и что ψ есть C^r-изоморфизм из открытого в X подмногообразия V на открытое подмногообразие $\psi(V)$ в $B \times F$. Если X наделено этой структурой, отображение $p: X \to B$ есть субмерсия класса C^r.

Пусть $b \in B$ и $X_b = p^{-1}(b)$. На X_b существует одна и только одна такая структура K-многообразия класса C^s, что для всякой карты $\theta = (V, \psi, F)$ на $C^{r,s}$-многообразии X тройка $\theta_b = (V \cap X_b, \mathrm{pr}_2 \circ \psi \mid (V \cap X_b), F)$ есть карта на многообразии X_b. Структура дифференцируемого многообразия класса C^r, лежащая ниже этой структуры, индуцирована структурой дифференцируемого многообразия класса C^r на X, определенной выше.

15.2.3. *Примеры*

(i) Если B сводится к одной точке, понятие $C_K^{r,s}$-многообразия над B эквивалентно понятию K-многообразия класса C^s.

(ii) Пусть Z есть K-многообразие класса C^s; возьмем $X = B \times Z$ и $p = \mathrm{pr}_1$. На X существует одна и только одна такая структура многообразия класса $C^{r,s}$ над B, что для всякой карты (U, ψ, L) на Z тройка $(B \times U, \mathrm{Id}_B \times \psi, L)$ есть карта на $C^{r,s}$-многообразии X.

(iii) Пусть X — многообразие класса $C^{r,s}$ над B и Y — открытое подмножество в X. Структура многообразия класса $C^{r,s}$ на Y, *индуцированная соответствующей* структурой на X, определяется так же, как в случае многообразий (см. 5.2.3).

(iv) Пусть M — векторное расслоение над K с базой B и класса C^r (7.3.4) и π — его проекция на B. На M существует одна и только одна такая структура многообразия класса $C_K^{r,\omega}$ над B, что если (U, ψ, F) есть K-векторная карта на M (8.8.1), то тройка $(\pi^{-1}(U), \psi, F)$ есть карта на $C_K^{r,\omega}$-многообразии M.

15.2.4. Пусть X — многообразие класса $C^{r,s}$ над B, p — его проекция, L — банахово K-пространство и f — отображение из X в L. Говорят, что f принадлежит классу $C^{r,s}$, если для всякой карты (V, ψ, F) на $C^{r,s}$-многообразии X отображение $(f \mid V) \circ \psi^{-1}$ из $\psi(V)$ в L принадлежит классу $C^{r,s}$ (15.1.6). Такое отображение принадлежит классу C^r, и его ограничение на X_b при $b \in B$ принадлежит классу C^s.

15.2.5. Пусть $g: B \to B'$ — морфизм дифференцируемых многообразий класса C^r, X (соотв. X') — многообразие класса $C^{r,s}$ над B (соотв. B') и h — отображение из X в X'. Говорят, что h есть *g-морфизм класса $C^{r,s}$*, если выполнены следующие три условия:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, dashed, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

a) $p' \circ h = g \circ p$;

b) h непрерывно;

c) для всякой карты (V', ψ', F') на $C^{r,s}$-многообразии X' отображение $\mathrm{pr}_2 \circ \psi' \circ h$ из $V = h^{-1}(V')$ в F' принадлежит классу $C^{r,s}$ (в смысле 15.2.4), коль скоро открытое подмножество V наделено структурой, индуцированной структурой на X (15.2.3, (iii)).

Если $B = B'$ и $g = \mathrm{Id}_B$, говорят также, что h есть *B-морфизм класса $C^{r,s}$*. Для того чтобы B-морфизм класса $C^{r,s}$ был B-изоморфизмом класса $C^{r,s}$, достаточно, чтобы он был изоморфизмом класса C^1.

Пусть $g': B' \to B''$ — морфизм многообразий класса C^r, и пусть X'' — многообразие класса $C^{r,s}$ над B''. Если $h: X \to X'$ есть g-морфизм класса $C^{r,s}$ и $h': X' \to X''$ есть g'-морфизм класса $C^{r,s}$, то $h' \circ h$ есть $(g' \circ g)$-морфизм класса $C^{r,s}$.

15.2.6. Пусть X — многообразие класса $C^{r,s}_{\mathbf{R}}$ над B и p — его проекция; предполагается, что $s \neq \omega$, что X отделимо и что p собственно (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 10, n° 1). Тогда для всякого $b \in B$ существует открытая окрестность U точки b и $C^{r,s}$-изоморфизм из $p^{-1}(U)$ на $U \times X_b$, где $X_b = p^{-1}(b)$.

15.2.7. Пусть X — многообразие класса $C^{r,s}_K$ над B, p — его проекция и $\sigma: B \to X$ — сечение класса C^r. *Трубчатой окрестностью* класса $C^{r,s}_K$ сечения σ называется тройка (M, N, φ), где M есть K-векторное расслоение с базой B и класса C^r, N — открытая окрестность множества $\sigma(B)$ в X и φ есть B-изоморфизм класса $C^{r,s}_K$ из N на открытое подмножество в M (см. 15.2.3, (iv)), переводящее сечение σ в нулевое сечение расслоения M.

Предположим, что $s \geqslant r + 1$ и что многообразие B паракомпактно и допускает разбиения единицы класса C^r (5.3.6); тогда σ имеет трубчатые окрестности класса $C^{r,s}_K$.

15.3. Многообразия сечений и многообразия отображений

15.3.1. (*Структура банахова пространства на пространстве сечений.*) Пусть B — *компактное* дифференцируемое многообразие класса C^r, и пусть M — векторное расслоение над K (7.3.4) с базой

B и класса C^r; обозначим через M_r дифференцируемое многообразие класса C^r, лежащее ниже M (7.4.1). Топология на $\mathscr{S}^r_M(B)$, индуцированная топологией равномерной C^r-сходимости из $\mathscr{C}^r(B; M_r)$ (12.3.10), превращает $\mathscr{S}^r_M(B)$ в *банахово K-пространство.*

Пусть $(U_i)_{i\in I}$ — конечное открытое покрытие многообразия B и для каждого $i \in I$ пусть $c_i = (U_i, \varphi_i, E_i)$ — карта на B и $t_i = (U_i, \psi_i, F_i)$ — K-векторная карта на M (8.8.1). Наделим каждое из E_i (соотв. F_i) нормой, согласованной со структурой банахова пространства над $\mathbf{R}$ (соотв. K), и пусть $(V_i)_{i\in I}$ — такое замкнутое покрытие многообразия B, что $V_i \subset U_i$ для всякого i. Для $f \in \mathscr{S}^r_M(B)$ и $i \in I$ обозначим через f_i отображение из $\varphi_i(U_i)$ в F_i, полученное в результате композиции отображений

$$\varphi_i(U_i) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \xrightarrow{f} M|U_i \xrightarrow{\psi_i} U_i \times F_i \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} F_i.$$

Положим

$$\|f\| = \sup_{i\in I, p\leqslant r, x\in V_i} \|D^p f_i(\varphi_i(x))\|.$$

Отображение $f \mapsto \|f\|$ есть *норма* на $\mathscr{S}^r_M(B)$, которая определяет на $\mathscr{S}^r_M(B)$ структуру банахова пространства над K.

Если N — открытое подмножество в пространстве M, то множество $\mathscr{S}^r(B; N)$ сечений $f \in \mathscr{S}^r_M(B)$, таких, что $f(B) \subset N$, открыто в $\mathscr{S}^r_M(B)$.

15.3.2. Пусть B — компактное дифференцируемое многообразие класса C^r и X — многообразие класса $C^{r,s}_K$ $(s \geqslant r+1)$ над B. Если N — открытое подмножество в X, обозначим через $\mathscr{S}^r(B; N)$ множество сечений класса C^r проекции p, образ которых содержится в N. На $\mathscr{S}^r(B; X)$ существует одна и только одна такая структура K-многообразия класса C^{s-r}, что для всякого сечения $\sigma \in \mathscr{S}^r(B; X)$ и всякой трубчатой окрестности (M, N, φ) класса $C^{r,s}_K$ сечения σ (15.2.7) тройка $(\mathscr{S}^r(B; N), \varphi^*, \mathscr{S}^r_M(B))$, где φ^* есть отображение $f \mapsto \varphi \circ f$, является картой на K-многообразии $\mathscr{S}^r(B; X)$.

В дальнейшем $\mathscr{S}^r(B; X)$ наделяется этой структурой.

15.3.3. Пусть X — компактное дифференцируемое многообразие класса C^r и Y есть K-многообразие класса C^s $(s \geqslant r+1)$. Пусть $\mathscr{C}^r(X; Y)$ — множество отображений класса C^r из X в Y (другими словами, со значениями в многообразии класса C^r, лежащем ниже Y (см. 5.13.1 и 5.14.2)). Наделим $\mathscr{C}^r(X; Y)$ структурой K-многообразия класса C^{s-r}, получаемой в результате отождествления с

$\mathcal{S}^r(X; X \times Y)$ (см. 15.2.3 (ii) и 15.3.2). Его называют *многообразием отображений класса C^r из X в Y*. Его топология есть топология равномерной C^r-сходимости (12.3.10).

Предположим, что Y *отделимо;* этим же свойством обладает тогда и $\mathcal{C}^r(X; Y)$. Более того, множество иммерсий (соотв. погружений, субмерсий, сюръективных субмерсий, этальных морфизмов, изоморфизмов) класса C^r из X в Y есть *открытое* подмножество в $\mathcal{C}^r(X; Y)$.

Пусть X' — компактное дифференцируемое многообразие класса C^r, $\varphi: X' \to X$ — морфизм дифференцируемых многообразий класса C^r и $\psi: Y \to Y'$ — морфизм K-многообразий класса C^s. Отображение $f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi$ есть морфизм класса C^{s-r} из $\mathcal{C}^r(X; Y)$ в $\mathcal{C}^r(X'; Y')$.

15.3.4. *(Ослабление структуры.)* Сохраним предположения и обозначения из 15.3.3. Пусть дополнительно $s' \in N_{\mathbf{R}}$, где $r < s' \leqslant s$, и пусть $Y_{s'}$ — вещественное многообразие класса $C^{s'}$, лежащее ниже Y (5.13 и 5.14.2). Структура вещественного многообразия класса $C^{s'-r}$ на $\mathcal{C}^r(X; Y_{s'})$ лежит ниже структуры K-многообразия класса C^{s-r} на $\mathcal{C}^r(X; Y)$.

15.3.5. Пусть X и X' — компактные дифференцируемые многообразия класса C^r и $C^{r'}$ соответственно, причем $r' < r$, и пусть Y есть K-многообразие класса C^s с $s \geqslant r+1$. Положим $t = \operatorname{Inf}(r-r', s-r)$. Отображение $(f, g) \mapsto g \circ f$ есть морфизм класса C^t из $\mathcal{C}^{r'}(X', X) \times \mathcal{C}^r(X; Y)$ в $\mathcal{C}^{r'}(X'; Y)$.

15.3.6. *(Касательное пространство к $\mathcal{C}^r(X; Y)$.)* Примем предположения из 15.3.3; пусть $f \in \mathcal{C}^r(X; Y)$ и ξ — касательный вектор в f к многообразию $\mathcal{C}^r(X; Y)$. Если $x \in X$, обозначим через ε_x отображение $g \mapsto g(x)$ из $\mathcal{C}^r(X; Y)$ в Y; это морфизм класса C^{s-r}. Образ относительно $T_f(\varepsilon_x)$ элемента ξ есть элемент ξ_x из $T_{f(x)}(Y)$, отображение $x \mapsto \xi_x$ есть поднятие класса C^r отображения f в $T(Y)$ (см. 8.6.1), и его можно отождествить с сечением класса C^r векторного расслоения $f^*T(Y)$ с базой X. Таким способом получается *изоморфизм* из касательного пространства $T_f(\mathcal{C}^r(X; Y))$ на банахово пространство $\mathcal{S}^r_{f^*T(Y)}(X)$.

15.3.7. *(Интерпретация многообразия $\mathcal{C}^p(X; \mathcal{C}^q(Y; Z))$.)* Пусть X и Y — компактные дифференцируемые многообразия класса C^p

и C^q соответственно ($1 \leqslant p \leqslant +\infty, 1 \leqslant q < +\infty$) и Z есть K-многообразие класса C^s с $s \geqslant p + q$. Пусть $f\colon X \times Y \to Z$ — непрерывное отображение; для всякого $x \in X$ обозначим через f_x отображение $y \mapsto f(x, y)$ из Y в Z. Следующие два свойства эквивалентны:

a) Каковы бы ни были карты $c = (U, \varphi, E)$ на X, $d = (V, \psi, F)$ на Y и $e = (W, \theta, G)$ на Z, такие, что $f(U \times V) \subset W$, частные производные $D_E^{p'} D_F^{q'} f'$ отображения f', являющегося представлением отображения f в картах $c \times d$ и e (5.3.2), существуют и непрерывны для $p' \leqslant p$ и $q' \leqslant q$.

b) Для всякого $x \in X$ отображение f_x принадлежит классу C^q и отображение $x \mapsto f_x$ есть морфизм класса C^p из X в многообразие $\mathcal{C}^q(Y; Z)$.

15.3.8. Пусть Y — компактное K-многообразие класса C^s с $s \geqslant r + 1$, и пусть $\mathrm{Diff}^r(Y)$ — группа автоморфизмов класса C^r вещественного многообразия Y_r класса C^r, лежащего ниже Y. Множество $\mathrm{Diff}^r(Y)$ открыто в $\mathcal{C}^r(Y; Y) = \mathcal{C}^r(Y_r; Y)$; оно наделяется структурой K-многообразия класса C^{s-r}, индуцированной соответствующей структурой на $\mathcal{C}^r(Y; Y)$. Закон композиции $(f, g) \mapsto g \circ f$ превращает $\mathrm{Diff}^r(Y)$ в *топологическую группу*. Напротив, структура многообразия класса C^{s-r}, вообще говоря, не согласована с групповой структурой на $\mathrm{Diff}^r(Y)$. Для $f \in \mathrm{Diff}^r(Y)$ отображение $g \mapsto g \circ f$ из $\mathrm{Diff}_r(Y)$ в себя принадлежит классу C^{s-r}, но отображение $g \mapsto f \circ g$ не принадлежит, вообще говоря, классу C^1. В частности, $\mathrm{Diff}^r(Y)$ *не является, вообще говоря, группой Ли* [1].)

---

[1] Предположим, что $s = \infty$. Пусть $\mathrm{Diff}^\infty(Y)$ — группа автоморфизмов класса C^∞ многообразия Y; наделим ее наименее тонкой топологией, в которой канонические инъекции $\mathrm{Diff}^\infty(Y) \to \mathrm{Diff}^r(Y)$ непрерывны для любого целого числа $r \geqslant 1$. Пусть, с другой стороны, $\mathrm{Diff}^0(Y)$ — группа гомеоморфизмов пространства Y, наделенная топологией равномерной сходимости (*Top. gen.*, chap. X, § 3, n° 5, prop. 11). Если $\dim Y \geqslant 1$, невозможно найти группу Ли G и непрерывные гомоморфизмы из $\mathrm{Diff}^\infty(Y)$ в G и из G в $\mathrm{Diff}^0(Y)$, композиция которых была бы канонической инъекцией (см. *Группы* и *алгебры Ли*, гл. III, § 4, упражнение 7).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Непрерывные многочлены и формальные ряды

В этом приложении через F обозначается отделимое полинормированное пространство над K, через E_i (для $1 \leqslant i \leqslant n$) — нормированное пространство над K и через E — топологическое векторное пространство, являющееся произведением пространств E_i.

Для $\alpha \in \mathbf{N}^n$ и $1 \leqslant j \leqslant |\alpha|$ полагаем

$$\alpha(j) = \inf\{k \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n \text{ и } j > \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\}$$

(последовательность чисел α (j), тем самым, получается, если записать α_1 раз 1, ..., α_n раз n).

Через E_α обозначается топологическое векторное пространство, являющееся произведением семейства пространств $E_{\alpha(j)}$ для $1 \leqslant j \leqslant |\alpha|$. Через $\mathrm{Hom}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ обозначается пространство $|\alpha|$-полилинейных отображений из E_α в F и через $\mathscr{L}_\alpha$ $(E_1, \ldots, E_n; F)$ — подпространство в $\mathrm{Hom}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$, образованное *непрерывными* полилинейными отображениями и наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах в E_α; это отделимое полинормированное пространство. Для всякой непрерывной полунормы γ на F и всякого $u \in \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ обозначим через $\|u\|_\gamma$ наименьшее число $\geqslant 0$, такое, что

$$\|u(x_1, \ldots, x_{|\alpha|})\|_\gamma \leqslant \|u\|_\gamma \cdot \|x_1\| \cdots \|x_{|\alpha|}\|,$$

каковы бы ни были элементы $x_i \in E_{\alpha(i)}$. Отображение $u \mapsto \|u\|_\gamma$ есть непрерывная полунорма на пространстве $\mathscr{L}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$; когда γ пробегает множество непрерывных полунорм на F, семейство полунорм $u \mapsto \|u\|_\gamma$ определяет топологию пространства $\mathscr{L}_\alpha$ $(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Через p_i обозначается каноническая проекция из E на E_i. Для $\alpha \in \mathbf{N}^n$ с $\alpha \neq 0$ через p_α обозначается отображение $x \mapsto (p_{\alpha(j)}(x))$ из E в E_α.

А.1. Отображение f из E в F называется *мультиоднородным многочленом мультистепени* α (с $\alpha \in \mathbf{N}^n$) на E со значениями в F, если существует такой элемент

$$u \in \mathrm{Hom}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F),$$

что $f = u \circ p_\alpha$.

А.2. Через $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ обозначается образ пространства $\mathcal{L}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ относительно линейного отображения $u \mapsto u \circ p_\alpha$ из $\mathrm{Hom}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ в пространство отображений из E в F, наделенный топологией, являющейся фактором топологии пространства $\mathcal{L}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$. Элемент из $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ называется *мультиоднородным мультистепени* α *непрерывным многочленом* на E со значениями в F. Топология на $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ определяется семейством полунорм

$$\|f\|_\gamma = \inf_{u \in \mathcal{L}_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F), f = u \circ p_\alpha} \|u\|_\gamma,$$

где γ описывает множество непрерывных полунорм на F. Если F — нормированное пространство с нормой γ, то вместо $\|f\|_\gamma$ пишут $\|f\|$. Пространство $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ и его топология не меняются, если заменить данную норму на каждом E_i на эквивалентную. Их можно определить, стало быть, когда E_i суть нормируемые топологические векторные пространства.

В частности, элемент из $P_k(E; F)$ называется *однородным полной степени* k *непрерывным многочленом* на E со значениями в F. Пространство $P_k(E; F)$ есть прямая топологическая сумма пространств $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ для $\|\alpha\| = k$. Пространство $P_0(E; F)$ есть пространство постоянных отображений из E в F, и оно отождествляется с F.

А.3. Через $P(E; F)$ или $P(E_1, \ldots, E_n; F)$ обозначается векторное подпространство векторного пространства всех отображений из E в F, порожденное подпространствами $P_k(E; F)$. Оно есть прямая сумма подпространств $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ для $\alpha \in \mathbf{N}^n$, а также подпространств $P_k(E; F)$ для $k \in \mathbf{N}$. Элемент из $P(E; F)$ называется *непрерывным многочленом* на E со значениями в F.

А.4. Пусть G_j — нормированные пространства (для $1 \leqslant j \leqslant m$). Пусть $f_j \in P(E_1, \ldots, E_n; G_j)$ (для $1 \leqslant j \leqslant m$), и пусть $g \in P(G_1, \ldots, G_m; F)$. Отображение

$$h: x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

принадлежит $P(E_1, \ldots, E_n; F)$. Если дополнительно $f_j \in P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; G_j)$ для $1 \leqslant j \leqslant m$ (с $\alpha \in \mathbf{N}^n$) и $g \in P_\beta(G_1, \ldots, G_m; F)$ (с $\beta \in \mathbf{N}^m$), то имеем $h \in P_{|\beta|\alpha}(E_1, \ldots, E_n; F)$ и

$$\|h\|_\gamma \leqslant \|g\|_\gamma \cdot \|f\|^\beta$$

для всякой непрерывной полунормы γ на F (где положено $\|f\|^\beta = \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \|f_j\|^{\beta_j}$).

А.5. Через $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$ обозначается векторное пространство, являющееся произведением пространств $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$ для $\alpha \in \mathbf{N}^n$, наделенное топологией произведения *дискретных* топологий на каждом множителе. Эта топология превращает $\hat{P}(E_1, \ldots$ $\ldots, E_n; F)$ в *отделимую и полную* топологическую группу. Линейное отображение из $P(E_1, \ldots, E_n; F)$ в $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$, продолжающее канонические инъекции пространств $P_\alpha(E_1, \ldots, E_n; F)$, инъективно, и его образ плотен в $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$: непрерывный полином на E со значениями в F обычно отождествляют с его образом в $\hat{P}(E_1, \ldots$ $\ldots, E_n; F)$.

Тождественное отображение пространства $P(E_1, \ldots, E_n; F) =$ $= P(E; F)$ продолжается по непрерывности до изоморфизма из $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$ на $\hat{P}(E; F)$. Элемент из $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$ называется *формальным рядом с непрерывными составляющими* (или, допуская вольность речи, *формальным рядом*) на произведении пространств E_i со значениями в F.

А.6. Пусть G_j (для $1 \leqslant j \leqslant m$) — нормированные пространства, и пусть $g \in P(G_1, \ldots, G_m; F)$. Отображение $\mathfrak{f} \mapsto g \circ \mathfrak{f}$ из $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} P(E_1, \ldots$ $\ldots, E_n; G_j)$ в $P(E_1, \ldots, E_n; F)$ продолжается по непрерывности до отображения (обозначаемого также через $\mathfrak{f} \mapsto g \circ \mathfrak{f}$) из $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \hat{P}(E_1, \ldots$ $\ldots, E_n; G_j)$ в $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Пусть $f_j = (f_{j,\alpha})_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \in \hat{P}(E_1, \ldots, E_n; G_j)$ с $f_{j,0} = 0$. Положим $\mathfrak{f} = (f_j)$: отображение $g \mapsto g \circ \mathfrak{f}$ из $P(G_1, \ldots, G_m; F)$ в $\hat{P}(E_1, \ldots, E_n; F)$ продолжается по непрерывности до отображения (также обозначаемого через $g \mapsto g \circ \mathfrak{f}$) из $\hat{P}(G_1, \ldots, G_m; F)$ в $\hat{P}(E_1, \ldots$ $\ldots, E_n; F)$.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Н. БУРБАКИ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *В. М. Новоселов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

Сдано в набор 19/IX 1974 г. Подписано к печати 14/II 1975 г.
Бумага тип. № 2. $60\times90^1/_{16}$=7,00 бум. л. 14,00 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 11,61. Изд. № 1/7955. Цена 1 р. 10 к. Зак. 610.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29
с матриц Головного предприятия республиканского
производственного объединения «Полиграфкнига»
Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3

В издательстве «Мир» в 1975 г.
готовится к выпуску

Бурбаки Н. **Группы и алгебры Ли,** гл. I—III, пер. с франц., 32 л.

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики «Основы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки.

В 1972 г. издательством «Мир» был выпущен перевод гл. IV—VI книги «Группы и алгебры Ли», а сейчас предлагается перевод ее начальных глав (в таком же порядке выходили французские издания). Книга отражает самые современные результаты в этой области. В ней имеется обширный материал по теории алгебр Ли, свободных алгебр Ли и групп Ли.

Книга предназначена для широкого круга математиков различных специальностей — от студентов до научных работников.

Если Вы желаете приобрести эту книгу, оставьте в книжном магазине предварительный заказ. Своевременное оформление заказа гарантирует Вам приобретение нужной книги.

В издательстве «Мир» в 1975 г. готовится к выпуску

Кон П. **Свободные кольца и их связи,** пер. с англ., 22 л.

Автор книги, известный английский ученый П. Кон, уже знаком советским математикам по переводу его книги «Универсальная алгебра» («Мир», 1968). В новой монографии Кона собраны все известные к настоящему времени главные результаты о свободных ассоциативных алгебрах и близких к ним кольцах. Основная цель книги — продемонстрировать тесную связь двух главных ветвей теории колец — теории (некоммутативных) алгебр и теории коммутативных колец, а также подчеркнуть, что оба эти направления можно рассматривать как части некоторой единой теории.

Книга написана с большой заботой о читателе. Она будет очень полезна студентам, аспирантам университетов и пединститутов, а также специалистам-математикам.

Если Вы желаете приобрести эту книгу, оставьте в книжном магазине предварительный заказ. Своевременное оформление заказа гарантирует Вам приобретение нужной книги.

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МНОГООБРАЗИЯ. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ БУРБАКИ